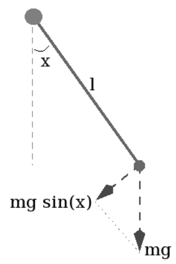
Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico

Primera entrega (17 de Noviembre de 2008)

1 Una ecuación diferencial de segundo orden.

En este problema se os pide resolver numéricamente dos ecuaciones diferenciales que representan el movimiento de un péndulo de masa *m* sujeto por una varilla rígida de longitud *l,* con y sin rozamiento. En principio nada impide que el péndulo dé varias vueltas sobre su eje.



Modelizamos el estado del sistema con una única variable: el ángulo *x* que forma la varilla con la dirección vertical. Para caracterizar el sistema durante un intervalo de tiempo, necesitamos calcular el valor de este ángulo en cada instante *x(t)*. Usando la segunda ley de Newton y la ley de gravedad obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden para el péndulo simple:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-g}{l}\sin(x)$$

1) Plantea la ecuación como un sistema de primer orden introduciendo la variable velocidad *v*. Resuelve el sistema de forma aproximada usando el método de matlab **`ode45`** en el intervalo *[0,10]*, para *x(0)=0, v(0)=1* tomando *g=10* y *l=1* (para simplificar trabajaremos sin unidades).

Este sistema de ecuaciones es *autónomo*, lo que quiere decir que la ecuación no depende explícitamente del tiempo. Por tanto, la trayectoria de un punto depende sólo de la posición y la velocidad inicial, pero no del instante de tiempo inicial. En estos casos es habitual representar las trayectorias en un diagrama que sólo contiene las variables del problema (posición y velocidad) pero no el tiempo (como hicimos en el caso del atractor de Lorentz en el capítulo 2 de las prácticas). Ignorando el hecho de que x es una variable periódica, podemos hacer la representación en el plano x, y. Como verás, tiene sentido permitir que x tome valores arbitrarios, entendiendo que dos puntos cuya coordenada x difiere en más de 2π representan la misma posición del péndulo. Cada vez que el péndulo gira sobre sí mismo pasamos de un intervalo [k·2π ,(k+1)·2π] al intervalo siguiente [(k+1)·2π ,(k+2)·2π].

2) Dibuja las trayectorias del punto con condición inicial *x(0)=0, v(0)=2 y* del punto con condición inicial *x(0)=0, v(0)=7.* Interpreta el resultado.

Introducimos ahora en el modelo una fuerza de rozamiento, con lo que la ecuación se queda en:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{-g}{l}\sin(x)-a\frac{dx}{dt}$$

3) Toma un valor de *a* igual a *0,5*. Dibuja las trayectorias de algunos puntos con distintas condiciones iniciales e interpreta el resultado. Encuentra un valor para la velocidad tal que si le imprimimos esa velocidad al péndulo cuando está en la posición de reposo *x=0*, el péndulo dé cinco vueltas sobre su eje.

4) Dibuja en el mismo diagrama las trayectorias de varios puntos con la misma posición inicial x(0)=0 pero distinta velocidad inicial. Este tipo de diagrama, al que podríamos llamar un *diagrama de fases del sistema dinámico del péndulo*, permite observar todo el comportamiento del sistema de un vistazo, y especialmente los *atractores* del sistema, que son los puntos del diagrama de fases a los que convergen las trayectorias o, en otras palabras, los posibles estados de *equilibrio estable* del péndulo, en los que una pequeña perturbación devolverá el sistema al mismo estado al cabo de un tiempo. En este ejemplo, los estados de equilibrio estable corresponden a *x=0, v=0*, que es la posición de reposo.

Para dibujar el diagrama puedes usar dos métodos:

1. Los comandos **`hold on`** y **`hold off`** de matlab permiten dibujar varias gráficas en la misma figura. Por ejemplo, para dibujar varias funciones seno con distintos periodos:

```
t=0:0.1:pi;
hold on
for k=0:3
    plot(t,sin(t*k),'Color',[k/3,1-k/3,0])
end
hold off
```

2. Si pasas al comando **`plot`** dos matrices, dibujará varias gráficas en el mismo diagrama, dibujando las columnas de la primera matriz contra las de la segunda. El siguiente código es equivalente al anterior (salvo por los colores, que ahora los elige automáticamente):

```
t=0:0.1:3;
plot([t',t',t',t'],[sin(0*t)',sin(1*t)',sin(2*t)',sin(3*t)'])
```

2 Diferencias finitas con un método de Euler implícito para la ecuación del calor.

En este problema se os pide realizar dos modificaciones al código del capítulo 3.1 de los apuntes:

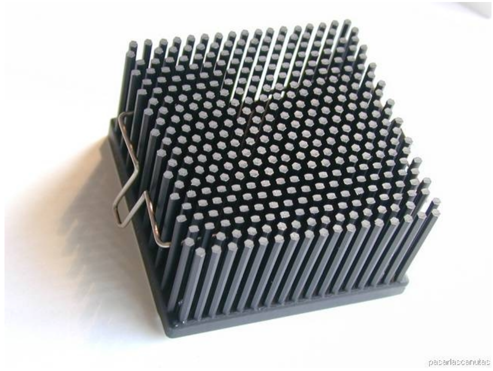
1. Cambia las condiciones de frontera a condiciones no homogéneas:

$$u(x_0)=a\,,\,u(x_{M+1})=b$$

Prueba el código generado para distintos valores de a y de b y para distintas condiciones iniciales. Observa la evolución de la solución durante un periodo de tiempo suficientemente largo y conjetura cuál será la distribución de temperatura en la barra en el límite para tiempos grandes.

2. Modifica el código para que implemente el método de Euler implícito en vez del método de Euler explícito para resolver la EDO resultante. Comprueba que el método no desarrolla inestabilidad aunque *dt* no sea del orden de h^2.

3 Simulación del disipador de un microprocesador (opcional).



Vamos a intentar modelizar la temperatura de un disipador para microprocesador, compuesto de una serie de barras paralelas sujetas por un extremo al micro. Aunque se trata de un problema tridimensional, haremos algunas simplificaciones para poder tratarlo como un problema unidimensional. En primer lugar, asumimos que la base común a todas las barras de metal se calienta de modo uniforme. Además, suponemos que el disipador está acoplado a un ventilador que mantiene constante la temperatura del aire cercano a las barras, y asumimos que esta temperatura es la misma en cada barra. De este modo, para estudiar la disipación de calor podemos limitarnos a estudiar una barra aislada, para después aproximar el comportamiento del disipador multiplicando por el número de barras.

Continuamos analizando el modelo, haciendo suposiciones sobre el comportamiento de cada barra que nos permitan escribir una ecuación diferencial. Cada barra pierde calor a lo largo de toda su longitud, traspasando este calor al aire. La magnitud de calor que se disipa en un instante de tiempo es proporcional a la diferencia de temperatura entre la barra y el aire. Ignoramos el calor que se disipa por la cara expuesta de la barra. La actividad del micro genera calor que llega a la base común a las barras del disipador. Este calor se reparte a partes iguales entre todas las barras.

Con estas hipótesis ya es posible plantear un modelo. Representamos la barra mediante un intervalo unidimensional *[0,L]*, donde *L* es la longitud de la barra. El extremo *0* está unido al micro, y el otro extremo queda libre. En el cuerpo de la barra la temperatura responde a la ley de Fourier y a la ley de enfriamiento de Newton:

$$\rho c u_t = k u_{xx} - r(u - u_{Ext})$$

En la fórmula anterior, el coeficiente r depende de la capacidad de transferencia térmica entre el aire y el material elegido para las barras y u_{Ext} es la temperatura exterior.

En el extremo libre no hay flujo de calor, mientras que por el extremo unido al micro entra una cantidad de calor igual a *(1/B)f(t)*, donde *B* es el número de barras y *f(t)* es la cantidad de calor generada por el micro en el instante de tiempo *t*. Esta cantidad de calor se toma como dato externo del problema.

$$\frac{du}{dx}(x_{0,} t) = \frac{1}{B} f(t), \frac{du}{dx}(x_f, t) = 0$$

Cuando el micro no está trabajando, f(t) es 0, de modo que para estudiar el comportamiento del disipador con el micro apagado obtenemos la ecuación:

$$\rho c u_t = k u_{xx} - r(u - u_{Ext})$$
$$\frac{du}{dx}(x_{0,} t) = 0, \frac{du}{dx}(x_f, t) = 0$$

Sin embargo, cuando el procesador opera a pleno rendimiento, f(t) es una cantidad constante de calor que llamamos F, de modo que para estudiar el comportamiento del disipador cuando el micro opera a pleno rendimiento obtenemos la ecuación:

$$\rho c u_t = k u_{xx} - r(u - u_{Ext})$$
$$\frac{du}{dx}(x_{0,} t) = \frac{F}{B}, \frac{du}{dx}(x_f, t) = \bullet$$

En un ejemplo concreto aceptamos los siguientes valores de los parámetros (todos en unidades del Sistema Internacional):

$$u_{Ext}=20\,^{o}C\,,\,L=0.03\,m\,,\,k=400\left(\frac{W}{m\,^{o}K}\right),c=0.38\left(\frac{Julios}{g\,^{o}K}\right),$$
$$B=300,\,F=3\cdot 10^{5}\left(^{o}K\,/\,m\right),\,\rho=9\cdot 10^{6}\left(g\,/\,m^{٣}\right),r=120000\left(\frac{Julios}{s\,m^{3}\,^{o}K}\right)$$

1) Después de un tiempo trabajando, la alarma de temperatura salta y se detiene el procesador. La temperatura se distribuye según la función:

$$u_{0}(x)=20+120\,cosh(17\,x)-57\,sinh(17\,x)$$

Dejamos reposar el procesador durante 10 segundos. Dibuja la distribución de temperatura en una de las barras al cabo de ese tiempo.

2) Partiendo de la situación de reposo en la que la temperatura del disipador es la temperatura ambiente $u(x,0)=u_{Ext}$, se conecta el procesador que comienza a operar a pleno rendimiento durante un minuto. ¿Cuál es la temperatura en el punto más caliente de la barra al cabo de ese tiempo?