Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico

Tercera entrega

Problemas en varias dimensiones espaciales.

Instrucciones

Las entregas deberán realizarse mediante el sistema previsto por la escuela. Se recomienda guardar la página de aceptación del sistema de entrega en previsión de problemas a la hora de entregar las prácticas

ATENCIÓN: para evitar conflictos con el servidor y simplificar la clasificación de las prácticas, os pido que utilicéis el siguiente criterio para poner nombre a las prácticas: Entrega3_Apellidos.extension. Por ejemplo

Entrega3_Fresno_Roble.pdf

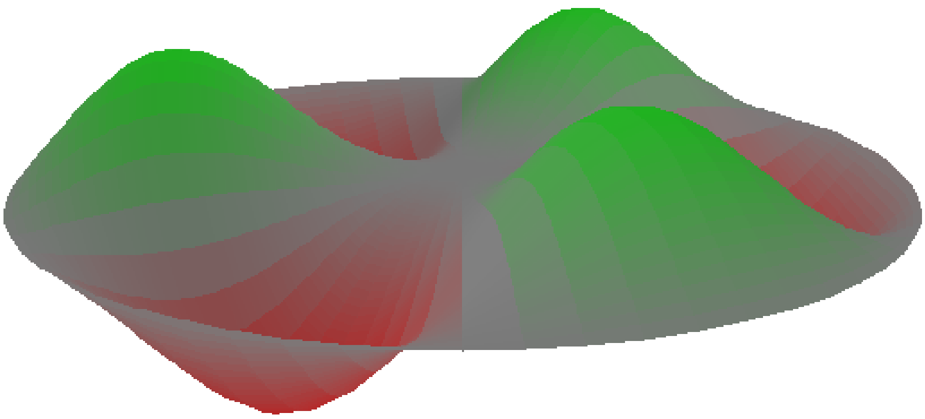
Entrega3_Castillo_Castro.zip

Cada entrega consiste en un archivo de texto que incluye comentarios, gráficas y fragmentos de código, *razonando y explicando cómo se han obtenido las gráficas y los resultados numéricos*. Los formatos válidos para entregar las prácticas son **pdf**, Open Document (**odt**), Latex (**tex**) y **doc**. Se recomienda entregar siempre la práctica en **pdf** y, si es posible, además en alguno de los otros formatos. Se puede entregar un archivo comprimido, pero sólo en formato **zip**.

Es necesario incluir en la entrega *el código* utilizado para obtener las gráficas y los resultados numéricos, sea por separado o como parte del fichero de texto, o de otro modo marcar las modificaciones realizadas al código usado en clase.

Primer problema

En este problema se os pide estudiar el comportamiento de una membrana circular con el borde fijo.



Parametrizamos la posición de la membrana mediante una función u: $D \to \mathbb{R}$ que a cada punto del disco de radio 1 le asigna su altura. Para tiempos $t > 0$, la función $u(t, r, \theta)$ satisface la ecuación:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \tag{1}$$

La posición inicial de la membrana viene dada por la función f: $D \to \mathbb{R}$ y la velocidad inicial por la función g: $D \to \mathbb{R}$. Vamos a estudiar la ecuación utilizando el principio de separación de variables y el sistema ortogonal completo de autofunciones del disco que habéis construído en clase usando las funciones de Bessel J_m.

La posición y la velocidad inicial se pueden escribir como suma de autofunciones del laplaciano:

$$\begin{aligned} f(r,\theta) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} g(r,\theta) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{mn} \cos(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{D}_{mn} \sin(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \end{aligned} \tag{3}$$

En la sección 6.7 del libro de Haberman se deriva la siguiente fórmula para la solución u de la ecuación con $t > 0$:

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(c\sqrt{-\lambda_{mn}}t) \cos(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cos(c\sqrt{-\lambda_{mn}}t) \sin(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin(c\sqrt{-\lambda_{mn}}t) \cos(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \sin(c\sqrt{-\lambda_{mn}}t) \sin(m\theta) J_m(\sqrt{-\lambda_{mn}}r) \end{aligned}$$

donde $c\sqrt{-\lambda_{mn}}\, C_{mn} = \tilde{C}_{mn}$ y $c\sqrt{-\lambda_{mn}}\, D_{mn} = \tilde{D}_{mn}$.

1) Asume que la posición y velocidad iniciales vienen dadas por:

$$f(r,\theta) = 0$$

$$g(r,\theta) = \begin{cases} 1 + \cos(\frac{\pi d}{\varepsilon}) & \text{si } d = |(x, y) - (x_0, y_0)| < \varepsilon \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para distintos puntos (x_0, y_0). Esta condición inicial representa un golpe con un objeto redondeado de radio ε. Usando las autofunciones con números n y m hasta 10, escribe el coeficiente de cada modo de vibración en una tabla para dos puntos de percusión distintos y un valor de ε arbitrario, pero igual en ambos casos.

2) Dibuja la posición de la membrana medio segundo después de golpear en un punto cualquiera, y escribe código que realice la misma tarea, pero usando el toolbox de matlab, y el comando `hyperbolic`, que produce una aproximación mediante el método de elementos finitos de la ecuación en derivadas parciales tipo hiperbólico:

$$d\, u_{tt} - \nabla(c \nabla u) + a\, u = f, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

La sintaxis es muy parecida a la de la función `parabolic` que usamos en el capítulo 6 de las prácticas:

```
u=hyperbolic(u0,ut0,tlist,b,p,e,t,c,a,f,d);
```

donde `ut0` es la velocidad inicial de la cuerda, y los demás argumentos son similares a los usados al llamar a `parabolic`.

Segundo problema

En este problema se te pide resolver de forma aproximada con el método de diferencias finitas la ecuación de ondas para una membrana de forma cuadrada con una fuerza externa E:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + E$$

1) Presenta un código de diferencias finitas que calcule la solución de forma aproximada. Realiza gráficas que muestren la evolución de la membrana para una fuerza externa que se anule en los extremos de la membrana.

2) Para fuerzas externas del tipo

$$E(t,x,y) = \sin(\omega t)\phi(x,y)$$

hay ciertos valores de ω que hacen que el sistema entre en resonancia. Encuentra dos funciones ϕ_1, y ϕ_2 y dos frecuencias ω_1 y ω_2 de modo que ϕ_1 entre en resonancia con la frecuencia ω_1 pero no con ω_2 y ϕ_2 entre en resonancia con la frecuencia ω_2 pero no con ω_1. Genera gráficas que muestren el valor máximo de $|u|$ sobre toda la membrana dibujado como función del tiempo para ilustrar estos comportamientos.