Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Numérico

Segunda entrega

Series de Fourier y ecuación de ondas.

Instrucciones

Las entregas deberán realizarse mediante el sistema previsto por la escuela. Se recomienda guardar la página de aceptación del sistema de entrega en previsión de problemas a la hora de entregar las prácticas.

Cada entrega consiste en un archivo de texto que incluye comentarios, gráficas y fragmentos de código, *razonando y explicando cómo se han obtenido las gráficas y los resultados numéricos*. Los formatos válidos para entregar las prácticas son **pdf**, Open Document (**odt**), Latex (**tex**) y **doc**. Se recomienda entregar siempre la práctica en **pdf** y, si es posible, además en alguno de los otros formatos. Se puede entregar un archivo comprimido, pero sólo en formato **zip**.

Es necesario incluir en la entrega *el código* utilizado para obtener las gráficas y los resultados numéricos, sea por separado o como parte del fichero de texto, o de otro modo marcar las modificaciones realizadas al código usado en clase.

Primer problema

En este problema intentaremos modelizar el comportamiento de una cuerda de longitud $L = \pi$ con los extremos fijos, con y sin rozamiento. La función $u(t, x)$ toma como valor el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto x y en el instante de tiempo t. Al estar los extremos fijos, sabemos que:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Suponemos que la cuerda comienza con una posición inicial dada por

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{3} & \text{si } \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{2\pi}{3} - x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{2\pi}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

y con velocidad inicial igual a 0. La función u satisface la ecuación de ondas con constante $c = 1$.

1) Comenzamos por el caso sin rozamiento:

$$u_{tt} = u_{xx}$$

Escribe la solución exacta en función de los coeficientes de la serie de senos de la posición inicial. Encuentra aproximaciones para los primeros 50 coeficientes de la serie de senos de la posición inicial, calculando las integrales de forma aproximada con la regla del trapecio. Dibuja la posición de la cuerda para tiempos $t = 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.8, 2.4, \pi$.

2) La fuerza de rozamiento en un punto es proporcional a la velocidad de la cuerda en ese punto, por lo que modificamos la ecuación de ondas introduciendo un término de rozamiento:

$$u_{tt} = u_{xx} - 2\beta u_t$$

donde $\beta = 0.25$. Como ves, se trata del mismo problema que has estudiado en el ejercicio 8 de la hoja 3 de problemas, de modo que tenemos una expresión para la solución exacta. Aprovecha esta fórmula y dibuja la posición de la cuerda para los mismos tiempos de antes.

Comenta el efecto del término de rozamiento.

3) Para el caso sin rozamiento $\beta = 0$ y un tiempo $t = 0.4$ fijo, estudia la solución en función del número N de coeficientes usados de la serie de senos. Estudia los casos $N = 10, 20, 50$.

Resuelve el problema sin rozamiento con un código de diferencias finitas, usando distintos valores de paso temporal Δt y paso espacial Δx (o h). Estudia los casos $\Delta t = 0.02, 0.01, 0.005$, eligiendo en cada caso para Δx el valor más pequeño posible que sea compatible con la condición de estabilidad de Courant.

Comenta brevemente las características de las distintas aproximaciones a la solución de la ecuación.

Segundo problema

En este problema se te pide resolver de forma aproximada con el método de diferencias finitas la ecuación de ondas:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

con $c = 1$, partiendo de la situación de reposo

$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$

con el extremo derecho fijo:

$$u(1,t) = 0$$

y cuyo extremo izquierdo se mueve arriba y abajo según la fórmula:

$$u(0,t) = (1 - \cos(\omega t))$$

Para realizar la discretización espacial, seguimos los pasos vistos en los capítulos 3 y 5.

Tomamos un mallado uniforme $x_1 = 0, ..., x_{m+1} = x_1 + m/M$, $x_{M+1} = 1$, y consideramos los valores de u sólo en esos puntos. La posición inicial de la cuerda es el siguiente vector de longitud $M+1$:

$$\hat{u}^0 = (\hat{u}_m^0)_{m=1}^{M+1}, \ \hat{u}_m^0 = 0$$

El objetivo es encontrar valores $\hat{u}_m(t)$ que aproximen el valor de la función u en el punto x_m y en el instante t. Los valores de u en los puntos x_1 y x_{M+1} son datos del problema (los datos de contorno), de modo que sólo falta encontrar valores que aproximen u en los puntos desde x_2 hasta x_M (un total de $M-1$ puntos). El objetivo es encontrar una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con la variable $\hat{u}$, del tipo:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} = F(\hat{u})$$

donde $F(\cdot)$ sea una función que actúe sobre vectores de $\mathbb{R}^{M-1}$ y aproxime $c^2 u_{xx}$.

1) Encuentra una función $F(\hat{u})$ que aproxime el término $c^2 u_{xx}$ en la ecuación de ondas.

2) Utilizando la misma versión discreta de la derivada $\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2}$ que usamos en el capítulo 5.1, es decir:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2}(\hat{u}(t_{n-1}) - 2\hat{u}(t_n) + \hat{u}(t_{n+1}))$$

encuentra un esquema numérico que te permita calcular soluciones aproximadas.

3) Escribe un programa que implemente ese esquema. Toma un valor de w igual a 4 y dibuja la posición de la cuerda en distintos instantes de tiempo a la vez en una gráfica tridimensional con el comando `mesh`.

4) Haz una gráfica que muestre la evolución del punto central de la cuerda durante los 20 primeros segundos, con $\omega = 4$ y con $w = \pi$. Comenta las diferencias que observas.