

Instrucciones

- Guarde todos los archivos en la carpeta EXAMENES.
- No olvide incluir su nombre y su número de puesto en los archivos de la entrega
- No olvide entregar todo el código necesario para replicar sus resultados:
- matlab: debe entregar tanto las funciones como los scripts.
- python: es suficiente con entregar uno o varios cuadernos jupyter.
- No olvide responder a las preguntas planteadas. Formas aceptadas:
- cuaderno jupyter
- documento office
- Hay 7 preguntas, **sólo es necesario responder a 5** de ellas. Cada pregunta se evalúa sobre 2 puntos.
- **Pregunte todas sus dudas.**

Una matriz

Consideramos A_n , que es una matriz $n \times n$:

- Tiene 1 en la diagonal principal.
- Tiene -1 en la diagonal debajo de la diagonal principal, y también en la (primera fila, última columna).
- Tiene 0 en el resto de la matriz.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & -1 \\ -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

- si $n = 2$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- si $n = 4$:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Ejercicio 1

- Escriba una función que reciba como argumento un número n y devuelva un array A de dimensiones $n \times n$ con la estructura descrita antes.
- Describa qué factorizaciones admite esta matriz, y calcúlelas para $n=4$.

In []:

In []:

2 Ejercicio 2

- Calcule el determinante y los autovalores de A_n para valores de n desde 4 hasta 20.
- Dibuje en una gráfica el máximo de la parte real de los autovalores de A_n para valores de n desde 4 hasta 20. Repita para el mínimo.
- Decida qué factorizaciones de A_n se pueden utilizar para resolver el sistema :

$$A_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde \mathbf{b} es un vector con 1 en todas sus entradas.

In []:

In []:

Un sistema de ODEs

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para n funciones desconocidas almacenadas en un vector $\vec{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$:

$$\partial_t \vec{u}(t) = -n \cdot A_n \cdot \vec{u}(t)$$

Por ejemplo, para $n=4$:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

3 Ejercicio 3

- Consideramos el sistema de ODEs anterior para $n=2$:

$$\partial_t \vec{u}(t) = -2 \cdot A_2 \cdot \vec{u}(t)$$

para

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 &= -2u_1 + 2u_2 \\ \partial_t u_2 &= 2u_1 - 2u_2 \end{aligned}$$

con las condiciones adicionales:

$$u_1(0) = 0, u_2(0) = 1$$

en el intervalo temporal $[0, 3]$.

- Identifique el tipo de problema planteado y proponga un método numérico para resolverlo de forma aproximada.

- Aproxime la solución del problema anterior y muestre en una gráfica la evolución de u_1 y u_2 .

In []:

In []:

Serie de Fourier

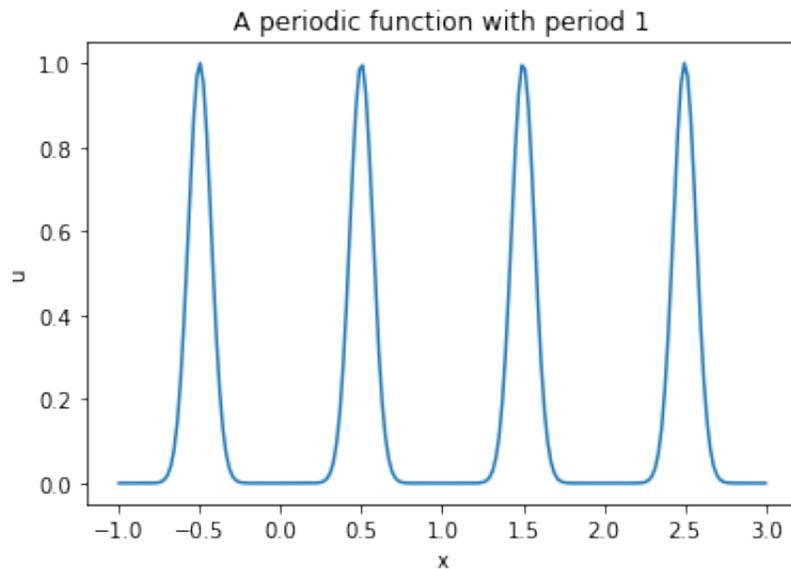
4 Ejercicio 4

Consideramos la siguiente función periódica de periodo $L=1$:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{x-0.5}{10}\right)^2} \text{ si } x \in [0,1]$$

Es decir, para x que no está en el intervalo $[0,1]$, se escribe x como suma de un entero n y un número real r que sí está en el intervalo $[0,1]$, y entonces, por ser periódica,

$$f(x) = f(n+r) = f(r) = e^{-\left(\frac{r-0.5}{10}\right)^2}$$



- Calcule de forma aproximada, por el método que prefiera (pero indique qué método ha usado), al menos 20 coeficientes de la **serie de Fourier** de f .
- Asegúrese de que puede reconstruir la función f de forma aproximada a partir de los coeficientes que acaba de calcular.

In []:

In []:

Ecuación del transporte

Queremos resolver la ecuación del transporte:

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0.$$

Es equivalente a escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0.$$

El dato inicial es la función f definida antes:

$$u(0, x) = f(x) = e^{-\left(\frac{x-0.5}{10}\right)^2} \quad \text{si } x \in [0, 1]$$

y en la variable espacial ponemos condiciones de frontera periódicas:

$$u(t, 0) = u(t, 1)$$

Método espectral

Para cada t fijo, descomponemos la función u en su serie de Fourier, en la variable x (aprovechando que es periódica en la variable x con periodo $L = 1$):

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{i2\pi \frac{k}{L} x}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación obtenemos:

$$\partial_t \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{i2\pi \frac{k}{L} x} \right) + c \partial_x \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{i2\pi \frac{k}{L} x} \right) = 0$$

Es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\partial_t \hat{u}_k(t) e^{i2\pi \frac{k}{L} x} + c \hat{u}_k(t) \partial_x e^{i2\pi \frac{k}{L} x} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\partial_t \hat{u}_k(t) + c \hat{u}_k(t) i2\pi \frac{k}{L} \right) e^{i2\pi \frac{k}{L} x} = 0$$

y como los coeficientes de la serie de Fourier son únicos, tenemos que, para cada k :

$$\partial_t \hat{u}_k(t) + c \left(i2\pi \frac{k}{L} \right) \hat{u}_k(t) = 0 \quad (1)$$

Estas ecuaciones son fáciles de resolver. La solución de la ecuación (1) es

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k(0) e^{-i2\pi c \frac{k}{L} t}$$

y la solución completa es:

$$u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(0) e^{i2\pi \frac{k}{L} (x-ct)}$$

donde $\hat{u}_k(0)$ es el coeficiente de Fourier de orden k de la función f :

$$f(x) = u(0, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(0) e^{i2\pi \frac{k}{L} x}$$

5 Ejercicio 5

- Para la solución u de la ecuación del transporte, **dibuje** las funciones $u(t, x)$, para x en el intervalo $[0, 1]$ y t fijo. Utilice los siguientes valores de t : 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5.

In []:

In []:

Discretización espacial, solución temporal exacta

Comparamos ahora con otro enfoque: Reemplazamos la función u de dos variables reales por un vector de funciones de una sola variable real, con los valores de u en los puntos de un mallado:

$$\begin{aligned}\vec{u}(t) &= (u_1(t), \dots, u_j(t), \dots, u_n(t)) \\ &= (u(t, x_1), \dots, u(t, x_j), \dots, u(t, x_n)), \quad x_j = j \cdot h = \frac{j}{n}\end{aligned}$$

No incluimos $u(t, x_0)$ porque $u(t, x_0) = u(t, x_n)$ para todo t .

- $u_j(t)$ aproxima a $u(t, \frac{j}{n})$
- $\vec{u}(t)$ aproxima a $u(t, x)$ para t fijo, y $x \in [0, 1]$

Reemplazamos la ecuación en derivadas parciales:

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0$$

por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\partial_t \vec{u} + cD \cdot \vec{u} = 0$$

donde D es un operador de diferencias finitas.

Por ejemplo, si usamos diferencias finitas de dos puntos hacia atrás (*backwards 2-point finite differences*) para aproximar $\partial_x u$ (aprovechamos que las condiciones de frontera son periódicas: $u(x_0) = u(x_n)$).

$$D \cdot \vec{u} = \left(\frac{u(x_1) - u(x_n)}{h}, \dots, \frac{u(x_{n-1}) - u(x_{n-2})}{h}, \frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h} \right)$$

y la matriz D es

$$D = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Este método numérico se llama upwind.

Las condiciones adicionales vienen dadas por la función f anterior:

$$u_i(0) = u(0, x_i) = f(x_i) = f(i/n)$$

Observaciones:

- para $n = 2$, es el mismo sistema del ejercicio 3.
- La matriz D se muy similar a la matriz A del ejercicio 1.

6 Ejercicio 6

- Resuelva el sistema anterior de ODEs de forma aproximada **para n=100**:

$$\partial_t \vec{u} + cD \cdot \vec{u} = 0$$

con condiciones iniciales

$$u_i(0) = f(x_i) = f(i/n).$$

- Puede usar la solución exacta para este problema lineal, usando la exponencial de matrices:

$$\vec{u}(t) = \exp(-ctD) \cdot \vec{u}(0)$$

- o usar un método numérico de su elección, pero de orden superior a 1 (no se permite el método de Euler que es el objeto del siguiente apartado).

- **Dibuje** los vectores $\vec{u}_j(t)$, con el índice j en el eje de las x (recordemos que $u_j(t)$ aproxima a $u(t, \frac{j}{n})$) y la cantidad u en el eje de las y . La variable t está fija. Utilice los siguientes valores de t : 0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5.

In []:

In []:

Discretización espacial y temporal

7 Ejercicio 7

- Resuelva el sistema anterior de ODEs de forma aproximada:

$$\partial_t \vec{u} + cD \cdot \vec{u} = 0$$

utilizando el **método de Euler**. Utilice los siguientes datos:

- Intervalo temporal $[t_0, t_f] = [0, 0.5]$
- Intervalo espacial $[0, 1]$
- Número de divisiones espaciales: $N_x=100$.
- Repita para tres valores del número de divisiones temporales N_t : 25, 50, 100.
- Dibuje en cada caso los vectores $\vec{u}_j(t)$, con el índice j en el eje de las x (recordemos que $u_j(t)$ aproxima a $u(t, \frac{j}{n})$) y la cantidad u en el eje de las y . La variable t está fija. Utilice los siguientes valores de t : 0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5.
- ¿Cuál es el número de Courant en cada caso $CFL = c \frac{dt}{h}$?
- ¿Qué clase de comportamiento exhibe este método en cada uno de los tres casos?

In []:

In []: