Instrucciones

- Guarde todos los archivos en la carpeta EXAMENES.
- No olvide incluir su nombre y su número de puesto en los archivos de la entrega
- No olvide entregar todo el código necesario para replicar sus resultados:
- matlab: debe entregar tanto las funciones como los scripts.
- python: es suficiente con entregar uno o varios cuadernos jupyter.
- No olvide responder a las preguntas planteadas. Formas aceptadas:
- cuaderno jupyter
- documento office
- Hay 7 preguntas, **sólo es necesario responder a 5** de ellas. Cada pregunta se evalúa sobre 2 puntos.
- **Pregunte todas sus dudas**.

Una matriz

Consideramos A_n, que es una matriz $n \times n$:

- Tiene 1 en la diagonal principal.
- Tiene -1 en la diagonal debajo de la diagonal principal, y también en la (primera fila, última columna).
- Tiene 0 en el resto de la matriz.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & -1 \\ -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo

- si $n = 2$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- si $n = 4$:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Ejercicio 1

- Escriba una función que reciba como argumento un número `n` y devuelva un array `A` de dimensiones $n \times n$ con la estructura descrita antes.
- Describa qué factorizaciones admite esta matriz, y calcúlelas para n=4.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

2 Ejercicio 2

- Calcule el determinante y los autovalores de A_n para valores de n desde 4 hasta 20.
- Dibuje en una gráfica el máximo de la parte real de los autovalores de A_n para valores de n desde 4 hasta 20. Repita para el mínimo.
- Decida qué factorizaciones de A_n se pueden utilizar para resolver el sistema :

$$A_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  donde **b** es un vector con 1 en todas sus entradas.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Un sistema de ODEs

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para n funciones desconocidas almacenadas en un vector $\overrightarrow{u}_n(t) = (u_0(t), u_1(t), \ldots, u_{n-1}(t))$:

$$\partial_t \overrightarrow{u}_n(t) = -n \cdot A_n \cdot \overrightarrow{u}_n(t)$$

Por ejemplo, **para n=4**:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t u_0 \\ \partial_t u_1 \\ \partial_t u_2 \\ \partial_t u_3 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

3 Ejercicio 3

- Consideramos el sistema de ODEs anterior **para n=2**:

$$\partial_t \overrightarrow{u}(t) = -2 \cdot A_2 \cdot \overrightarrow{u}(t)$$

  para

$$\overrightarrow{u}(t) = \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \end{pmatrix}$$

  o, equivalentemente

$$\begin{aligned} \partial_t u_0 &= -2u_0 + 2u_1 \\ \partial_t u_1 &= 2u_0 - 2u_1 \end{aligned}$$

con las condiciones adicionales:

$$u_0(0) = 0, u_1(0) = 1$$

en el intervalo temporal $[0, 3]$.

- Identifique el tipo de problema planteado y proponga un método numérico para resolverlo de forma aproximada.

- Aproxime la solución del problema anterior y muestre en una gráfica la evolución de u_0 y u_1.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Serie de Fourier

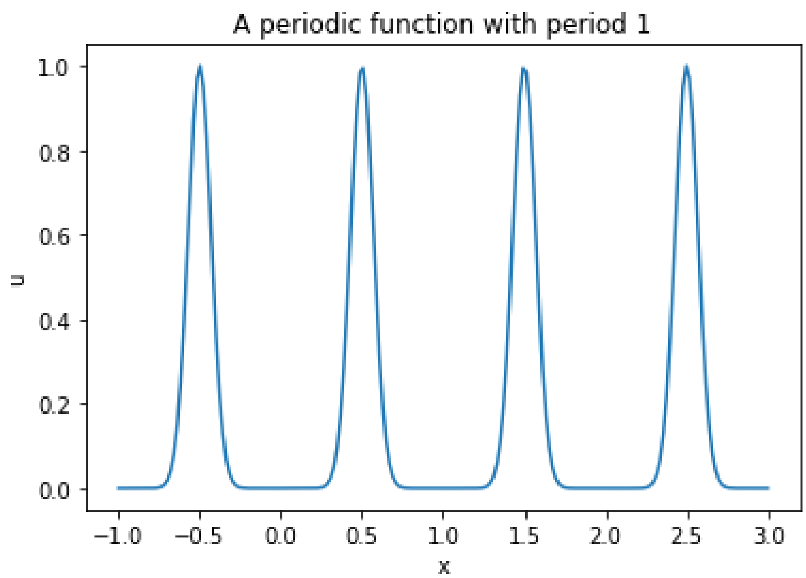
4 Ejercicio 4

Consideramos la siguiente función periódica de periodo L=1:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{x-0.5}{10}\right)^2} \text{ si } x \in [0,1]$$

Es decir, para x que no está en el intervalo $[0,1]$, se escribe x como suma de un entero n y un número real r que sí está en el intervalo $[0,1]$, y entonces, por ser periódica,

$$f(x) = f(n+r) = f(r) = e^{-\left(\frac{r-0.5}{10}\right)^2}$$



función periódica

- Calcule de forma aproximada, por el método que prefiera (pero indique qué método ha usado), al menos 20 coeficientes de la **serie de Fourier** de f.
- Aségurese de que puede reconstruir la función f de forma aproximada a partir de los coeficientes que acaba de calcular.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Ecuación del transporte

Queremos resolver la ecuación del transporte:

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0.$$

Es equivalente a escribir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0.$$

El dato inicial es la función f definida antes:

$$u(0,x) = f(x) = e^{-\left(\frac{x-0.5}{10}\right)^2} \text{ si } x \in [0,1]$$

y en la variable espacial ponemos condiciones de frontera periódicas:

$$u(t,0) = u(t,1)$$

Método espectral

Para cada t fijo, descomponemos la función u en su serie de Fourier, en la variable x (aprovechando que es periódica en la variable x con periodo $L = 1$):

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{i2\pi\frac{k}{L}x}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación obtenemos:

$$\partial_t \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{i2\pi\frac{k}{L}x} \right) + c\partial_x \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(t) e^{i2\pi\frac{k}{L}x} \right) = 0$$

Es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\partial_t \hat{u}_k(t) e^{i2\pi\frac{k}{L}x} + c\hat{u}_k(t)\partial_x e^{i2\pi\frac{k}{L}x} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\partial_t \hat{u}_k(t) + c\hat{u}_k(t) i2\pi\frac{k}{L} \right) e^{i2\pi\frac{k}{L}x} = 0$$

y como los coeficientes de la serie de Fourier son únicos, tenemos que, para cada k:

$$\partial_t \hat{u}_k(t) + c\left(i2\pi\frac{k}{L}\right)\hat{u}_k(t) = 0 \quad (1)$$

Estas ecuaciones son fáciles de resolver. La solución de la ecuación (1) es

$$\hat{u}_k(t) = \hat{u}_k(0) e^{-i2\pi c\frac{k}{L}t}$$

y **la solución completa es**:

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(0) e^{i2\pi\frac{k}{L}(x-ct)}$$

donde $\hat{u}_k(0)$ es *el coeficiente de Fourier de orden k de la función* f:

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k(0) e^{i2\pi\frac{k}{L}x}$$

5 Ejercicio 5

- Para la solución u de la ecuación del transporte, **dibuje** las funciones $u(t,x)$, para x en el intervalo $[0,1]$ y t fijo. Utilice los siguientes valores de t: 0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Discretización espacial, solución temporal exacta

Comparamos ahora con otro enfoque: Reemplazamos la función u de dos variables reales por un vector de funciones de una sóla variable real, con los valores de u en los puntos de un mallado:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}(t) &= \left(u_0(t),\ldots,u_j(t),\ldots,u_{n-1}(t)\right)\\ &= \left(u(t,x_0),\ldots,u(t,x_j),\ldots,u(t,x_{n-1})\right), \quad x_j = j\cdot h = \tfrac{j}{n}\end{aligned}$$

No incluímos $u(t,x_n)$ porque $u(t,x_0) = u(t,x_n)$ para todo t.

- $u_j(t)$ **aproxima a** $u(t,\frac{j}{n})$
- $\overrightarrow{u}(t)$ **aproxima a** $u(t,x)$ **para** t **fijo, y** $x\in[0,1]$

Reemplazamos la ecuación en derivadas parciales:

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0$$

por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\partial_t \overrightarrow{u} + cD\cdot\overrightarrow{u} = 0$$

donde D es un operador de diferencias finitas.

Por ejemplo, si usamos diferencias finitas de dos puntos hacia atrás (*backwards 2-point finite differences*) para aproximar $\partial_x u$ (aprovechamos que las condiciones de frontera son periódicas: $u(x_0) = u(x_n)$).

$$D\cdot\overrightarrow{u} = \left(\frac{u(x_0)-u(x_{n-1})}{h}, \frac{u(x_1)-u(x_0)}{h}, \ldots, \frac{u(x_{n-1})-u(x_{n-2})}{h}\right)$$

y la matriz D es

$$D = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

***Este método numérico se llama* upwind**.

Las condiciones adicionales vienen dadas por la función f anterior:

$$u_i(0) = f(x_i) = f(i/n)$$

Observaciones:

- para $n=2$, es el mismo sistema del ejercicio 3.
- La matriz D se muy similar a la matriz A del ejercicio 1.

6 Ejercicio 6

- Resuelva el sistema anterior de ODEs de forma aproximada **para n=100**:

$$\partial_t \overrightarrow{u} + cD \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

con condiciones iniciales

$$u_i(0) = f(x_i) = f(i/n).$$

  - *Puede usar la solución exacta* para este problema lineal, usando la exponencial de matrices:

$$\overrightarrow{u}(t) = \exp\left(-ctD\right) \cdot \overrightarrow{u}(0)$$

  - *o usar un método numérico* de su elección, pero de orden superior a 1 (no se permite el método de Euler que es el objeto del siguiente apartado).

- **Dibuje** los vectores $\overrightarrow{u}_j(t)$, con el índice j en el eje de las x (recordemos que $u_j(t)$ aproxima a $u(t, \frac{j}{n})$) y la cantidad u en el eje de las y. La variable *t está fija*. Utilice los siguientes valores de t: 0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5.

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```

Discretización espacial y temporal

7 Ejercicio 7

- Resuelva el sistema anterior de ODEs de forma aproximada:

$$\partial_t \overrightarrow{u} + cD \cdot \overrightarrow{u} = 0$$

utilizando **el método de Euler**. Utilice los siguientes datos:

- Intervalo temporal $[t_0, t_f] = [0, 0.5]$
- Intervalo espacial $[0, 1]$
- Número de divisiones espaciales: `Nx=100`.
- Repita para tres valores del número de divisiones temporales `Nt`: 25, 50, 100.
- Dibuje en cada caso los vectores $\overrightarrow{u}_j(t)$, con el índice j en el eje de las x (recordemos que $u_j(t)$ aproxima a $u(t, \frac{j}{n})$) y la cantidad u en el eje de las y. La variable t está fija. Utilice los siguientes valores de t: 0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5.
- ¿Cuál es el número de Courant en cada caso $CFL = c\frac{dt}{h}$?
- ¿Qué clase de comportamiento exhibe este método en cada uno de los tres casos?

```
In [ ]:
```

```
In [ ]:
```