Instrucciones

- Guarde todos los archivos en la carpeta `examen`.
- **No olvide incluir su nombre y su número de puesto en los archivos de la entrega**
- No olvide entregar **todo el código** necesario para replicar sus resultados:
  - `matlab`: debe entregar tanto las funciones como los scripts.
  - `python`: es suficiente con entregar uno o varios cuadernos jupyter.
- No olvide responder a las preguntas planteadas. Formas aceptadas:
  - cuaderno jupyter
  - documento office

1 Factorizando la matriz de van der Monde

1.1 Apartado 1

Defina una función que

- Recibe como argumentos:
  - Una lista `xs` de nodos con `n` elementos $x_1, \ldots, x_n$.
  - Un entero `k` menor que `n`
- Devuelve un array `V` de dimensiones $n \times k$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{k-1} \end{bmatrix}.$$

```
In [ ]:
```

1.2 Apartado 2

La matriz V está relacionada con el polinomio interpolador y con el polinomio aproximador.
En particular, los coeficientes del polinomio aproximador son la solución de

$$\left(V^T \cdot V\right) \cdot \mathbf{a} = V^T \cdot \mathbf{y},$$

Se pide:

- Discuta qué factorizaciones admiten la matriz V y la matriz $V^T \cdot V$, que puedan ser de ayuda para calcular polinomios interpoladores o aproximadores.
- Calcule estas factorizaciones para `k=3` y la lista de puntos `[1,2,3,4]`.
- Calcule estas factorizaciones para `k=3` y la lista de puntos `[1,2,...,10]`

```
In [ ]:
```

1.3 Apartado 3

Utilice las factorizaciones del apartado anterior para encontrar los polinomios aproximadores de grados 2 y 4 con la siguiente serie de datos:

```
xs = [ 1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
       18, 19, 20]
ys = [ 0.071,  0.458,  0.908,  1.344,  1.641,  1.934,  1.451,  1.571,
        1.282,  0.446,  0.261, -0.183, -0.372, -0.162, -0.181, -0.12 ,
       -0.545, -0.114,  0.505,  0.474]
```

```
In [ ]:
```

2 Ecuación diferencial

- Resuelve de forma aproximada el problema siguiente:

$$y'' = y + \frac{1}{1+5x^2}$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1$$

- Explica qué técnica has usado, y por qué.

```
In [ ]:
```

3 Error en la regla del trapecio

La *regla del trapecio* ***simple*** comete el siguiente error:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

para $h = x_1 - x_0$.

Vamos a probar esta fórmula para la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

Para vuestra conveniencia, adjuntamos la función f, sus derivadas y su primitiva en código python

```
f = lambda x:1/(1+25*x**2)
# Primera derivada de f
fp = lambda x:-50*x/(25*x**2 + 1)**2
# Segunda derivada de f
fp2 = lambda x:5000*x**2/(25*x**2 + 1)**3 - 50/(25*x**2 + 1)**2
# Primitiva de f
fpi = lambda x:np.arctan(5*x)/5
```

y en código matlab

```
f = @(x)(1/(1+25*x.^2));
% Primera derivada de f
fp = @ (x)(-50*x./(25*x.^2 + 1).^2);
% Segunda derivada de f
fp2 = @ (x)(5000*x.^2./(25*x.^2 + 1).^3 - 50./(25*x.^2 + 1).^2);
% Primitiva de f
fpi = @ (x)(atan(5*x)/5);
```

3.1 Apartado 1

Fijamos el punto $x_0 = 0$.

Queremos comparar la integral exacta

$$I(h) = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\,dx$$

con su aproximación por la regla del trapecio simple, *para distintos valores de h*, y comprobar la validez del término de error $\frac{h^3}{12}f''(\xi)$.

- Genere una lista de valores de h que decrece exponencialmente, por ejemplo `hs = [1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ...]`.
- Para cada valor de h, calcule la diferencia entre la integral exacta $I(h)$ y su aproximación por la regla del trapecio.

```
In [ ]:
```

3.2 Apartado 2

- Muestre en una gráfica `loglog` el error cometido como función del valor de `h`, para `x0` fijo.
- Muestre en esa misma gráfica la expresión del error de truncamiento $|\frac{h^3}{12}f''(\xi)|$, pero reemplazando el punto desconocido $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$ por x_0.
- ¿Qué clase de comportamiento tiene el error de redondeo?

```
In [ ]:
```

3.3 Apartado 3

Ahora fijamos `h=1/10`, y comparamos el error cuando cambiamos el punto x_0 - Muestre en una gráfica con escala lineal (lo habitual) el error cometido al aproximar la integral exacta $I(x_0) = \int_{x0-h}^{x0+h} f(x)\,dx$ con su aproximación por la regla del trapecio simple como función del valor de `x0`, para `h=10/10` fijo. - Muestre en esa misma gráfica la expresión del error $\frac{h^3}{12}f''(\xi)$, pero reemplazando el punto desconocido $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$ por x_0.

```
In [ ]:
```