diferencias_divididas

December 12, 2019

1 Diferencias divididas de sumas y productos

1.1 Apartado 1

Crea una función que: - Recibe como argumentos dos listas de valores: - una lista de ordenadas `xs`, de longitud `n` - otra lista `ys` de la misma longitud (que contiene el resultado de evaluar una cierta función f en cada punto de `xs`) - Devuelve un array `Tf` de dimensiones $n \times n$ con todas las diferencias divididas del tipo $f[x_\nu, \ldots, x_{\nu+j}]$, almacenadas en `Tf` de la forma siguiente: - En la entrada (i, j), si $i > j$, dejamos $T_f[i, j] = 0$. - En la diagonal principal aparecen los valores $T_f[j, j] = f(x_j) = y_j$. - Sobre la diagonal $i < j$ aparecen diferencias divididas en puntos consecutivos:

$$T_f[i, j] = f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j]$$

En otras palabras

$$T_f = \begin{pmatrix} f[x_0] & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & \cdots & f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \\ & f[x_1] & f[x_1, x_2] & \cdots & f[x_1, x_2, \ldots, x_n] \\ & & f[x_2] & & f[x_2, \ldots, x_n] \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & f[x_n] \end{pmatrix}$$

```
In [ ]:
```

1.2 Apartado 2

- Dadas dos funciones f y g, y una lista de ordenadas $x_0, \ldots, x_n$, creamos las matrices T_f y T_g definidas antes.
- Creamos también la matriz T_{fg} que corresponde a la función producto $x \to f(x)g(x)$ y la matriz T_{f+g} que corresponde a la función suma $x \to f(x) + g(x)$.
- Afirmamos que $T_f + T_g = T_{f+g}$.
- Afirmamos que $T_f \cdot T_g = T_{fg}$.

Comprueba empíricamente las dos afirmaciones anteriores.

```
In [ ]:
```

1.3 Apartado 3

Para un polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

las dos propiedades anteriores implican

$$T_P = a_0 \cdot Id + a_1 \cdot T_x + a_2 \cdot (T_x)^2 + \cdots + a_n \cdot (T_x)^n.$$

- Utiliza esta identidad para encontrar los coeficientes del polinomio Q que interpola a otro polinomio P dado por la expresión

$$P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

en los puntos $x_1 = 1, x_2 = 2, x_2 = 3$. - Comprueba tu solución construyendo el polinomio interpolador por otra técnica diferente, y dibujando ambos polinomios interpoladores.

```
In [ ]:
```

1 Péndulo amortiguado

Un péndulo amortiguado sigue la ecuación:

$$m \cdot l \cdot \theta'' + k \cdot l \cdot \theta' + m \cdot g \cdot \sin(\theta) = 0$$

donde

- l longitud del péndulo (= 10 m).
- θ ángulo que forma la cuerda con la vertical.
- g aceleración de la gravedad (≈ 10 m/sg).
- masa de la bola (= 20 kg).
- k coeficiente de fricción del medio (= 4 kg/sg).

1.1 Apartado 1

El péndulo comienza en la posición de reposo. Se imprime al péndulo una velocidad inicial de 1 rad/s.

- Resuelve de forma aproximada el PVI correspondiente al problema anterior, cuando $\theta(0) = 0, \theta'(0) = 1$, usando un método adaptativo, en el intervalo de tiempo `[0,60]`. Dibuja los puntos que ha utilizado el método adaptativo para aproximar la solución.

[ ]:
```

```

1.2 Apartado 2

- Interpola los valores obtenidos en el apartado anterior usando el polinomio de Lagrange, y la spline cúbica. Estima el máximo de la diferencia entre el resultado de interpolar con uno y otro método, en el intervalo `[0,60]`.

[ ]:
```

```

1.3 Apartado 3

Fijamos los valores de

- l longitud del péndulo (= 10 m).
- k coeficiente de fricción del medio (= 4 kg/sg).

pero buscamos elegir el parámetro `m` de modo que al dejar caer el péndulo desde la posición inicial $\theta(t_0) = -\pi/2$, el péndulo rebote hasta una posición *máxima* de $\theta(t_0) = +\pi/4$. Para ello:

1. Escribe una función `f` que reciba como argumento la masa `m` del péndulo, y devuelva el ángulo máximo que alcanza el péndulo cuando parte de su posición inicial con $\theta'(t_0) = 0, \theta(t_0) = -\pi/2$.

2. Encuentra el valor de `m` para el que `f(m)` es igual a $+\pi/4$. Explica qué método has utilizado para encontrar ese valor de `m`.
3. Comprueba la solución dibujando la trayectoria con las condiciones iniciales del enunciado, y la masa `m` encontrada.

[ ]:

```

```

1.4 Apartado 4

Volvemos a fijar la masa `m=20`.

En nuestro modelo la masa se concentra en el extremo del péndulo:

- la velocidad de la masa situada en el extremo del péndulo es $l \cdot \theta'(t)$.
- el desplazamiento Δs es la distancia recorrida $\Delta s = l \cdot \Delta\theta = l \cdot \theta' : \Delta t$.

La fuerza de fricción en el instante t es $k \cdot \text{velocity} = k \cdot l \cdot \theta'(t)$. El trabajo total de fricción durante todo el intervalo es la integral del producto de la fuerza por el desplazamiento.

$$\text{Work} = \int \text{Friction } \; ds = \int_{t_0}^{t_f} \text{Friction } l\theta' \, dt = \int_{t_0}^{t_f} kl^2 (\theta')^2 \, dt$$

Aproxima la integral anterior para estimar la energía total disipada, usando algún método de cuadratura numérica. Explicita el método elegido, y explica tu elección de método.

Pista: Antes de llamar al método de cuadratura, es conveniente obtener valores de θ' en una serie de puntos equiespaciados, y para ello puedes usar cualquier método de interpolación, pero también los atributos `t_eval` en python, o `tspan` en matlab.

[ ]:

```

```