

Interpretación de Soluciones
con
dos campos de Killing
en
Relatividad General

Memoria presentada por:
Leonardo Fernández Jambrina
Dirigida por:
Prof. Francisco Javier Chinea Trujillo

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Física Teórica II

Interpretación de Soluciones

con

dos campos de Killing

en

Relatividad General

Enero 1994

Memoria presentada por:
Leonardo Fernández Jambrina
para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas
Director de la Tesis:
Prof. Francisco Javier China Trujillo

A mi padre

“Was wir in einem Augenblick ungeteilt und ohne Fragen erleben, unverständlich und verwirrt wird, wenn wir es mit den Ketten der Gedanken zu unserem bleibenden Besitze fesseln wollen.”

R. Musil

Agradecimientos

Al profesor Francisco Javier China Trujillo, por haberme guiado con sus conocimientos y consejos a la consecución de esta memoria. Al doctor Cornelius Hoenselaers, por la gratificante colaboración que realizamos durante mi breve estancia en la Universidad de Loughborough. Al doctor José María Martín Senovilla, por su colaboración en los comienzos de este trabajo. A los doctores Luis Manuel González Romero y José Antonio Ruiz Martín por sus inestimables sugerencias y discusiones en nuestras extensas reuniones vespertinas. A los departamentos de Física Teórica de la Universidad Complutense de Madrid, en cuyas dependencias se ha desarrollado gratamente este trabajo durante estos años y cuyos miembros han sido una espléndida ayuda así como una amigable compañía. Al Ministerio de Educación y Ciencia, por financiar mi actividad a través de una de sus becas F.P.I. del Subprograma de Formación de Profesorado Universitario.

En otro orden de cosas, he de agradecer a mi familia y a mis buenos amigos por haber soportado mis ratos de malhumor y por haber sido un constante apoyo en las horas bajas. Y al paradisíaco paisaje de Llanes, Asturias, por ser la inestimable fuente de inspiración y reposo en las siempre escasas jornadas en las que pude evadirme de mis obligaciones. Un especial agradecimiento a mi padre, don Luis Fernández Fernández, profesor emérito de la Universidad de León, que tanto deseó ver llegado este día.

Índice General

1	Introducción	7
2	Formulación exterior	11
2.1	Introducción	11
2.2	Campos electromagnéticos	11
2.3	Ecuaciones de estructura	14
2.4	Identidades de Bianchi	16
2.5	Ecuaciones de Maxwell	16
2.6	Ecuaciones de Einstein	18
2.7	Simplificaciones	19
2.8	Ecuaciones de Ernst	20
2.9	Momentos multipolares	24
3	Densidades de magnitudes físicas	29
3.1	Introducción	29
3.2	Formalismo de Israel	30
3.2.1	Masa y momento angular	30
3.2.2	Carga eléctrica	32
3.3	Integrales de Komar	34
3.4	Teoría del potencial	35
3.4.1	Momento angular	36
3.4.2	Momento dipolar magnético	39
3.4.3	Transformación de Bonnor	41
3.4.4	Momento de masa	42
3.5	Estudio de algunos ejemplos	44
3.5.1	Métrica de Kerr	44
3.5.2	Dipolo magnético de Bonnor	48
3.5.3	Solución dipolar de Zipoy	50

4	Soluciones exactas	55
4.1	Introducción	55
4.2	Formalismo irrotacional	56
4.2.1	Ecuaciones de Ernst	56
4.2.2	Extensión de la clase de Weyl	59
4.2.3	Extensión de la familia de Papapetrou	61
4.3	Diagonalización del tensor de esfuerzos	62
4.3.1	Campos de Maxwell parcialmente degenerados	63
4.3.2	Una familia de electrovacs parcialmente degenerados	64
5	Solución multipolar perturbativa	67
5.1	Introducción	67
5.2	Cálculo de la métrica	68
5.3	Precesión del perihelio	70
5.3.1	Introducción	70
5.3.2	Ecuación geodésica	71
5.3.3	Resultado perturbativo	74
5.3.4	Convergencia de la expansión monopolar	77
5.4	Precesión de la línea de nodos	80
5.4.1	Introducción	80
5.4.2	Cálculo clásico	80
5.4.3	Cálculo relativista	82
5.4.4	Resultado	83
6	Estudio de una cosmología	87
6.1	Introducción	87
6.2	Ausencia de singularidades	89
6.2.1	Complejitud geodésica	89
6.2.2	Ausencia de singularidades	96
6.3	Propiedades de la solución	96
6.3.1	Propiedades del contenido material	96
6.3.2	Propiedades causales de la solución	97
6.4	Teoremas sobre singularidades	97
6.4.1	Teorema de Penrose	97
6.4.2	Teorema de Hawking y Penrose	99
6.5	Consecuencias	101
7	Conclusiones	103

A	Densidad magnética clásica	105
B	Análisis de Z_{rot} de Kerr	107
	B.1 Introducción	107
C	Métrica aproximada multipolar	121
	C.1 Funciones métricas	121
	C.1.1 Potencial de Ernst	121
	C.1.2 Métrica	122
	C.2 Desplazamiento del perihelio	126
	C.2.1 Energía de la órbita	126
	C.2.2 Frecuencia angular	129
	C.2.3 Desplazamiento del perihelio	131
	C.3 Desplazamiento de la línea de nodos	133
	C.3.1 Energía de la órbita circular	133
	C.3.2 Frecuencia angular	135
	C.3.3 Desplazamiento de la línea de nodos	137

Capítulo 1

Introducción

El estudio de configuraciones estacionarias con simetría axial de campos electromagnéticos y gravitacionales acoplados es de gran interés en astrofísica para la descripción de exteriores de objetos en rotación. Este tipo de configuraciones altamente idealizadas (no se tiene en cuenta ni la deceleración por emisión de radiación gravitacional ni los efectos de precesión debidos a la desviación del eje de rotación con respecto al eje de simetría) constituyen a su vez la primera aproximación para analizar el movimiento de planetas y discos de acreción en torno a estrellas de neutrones, agujeros negros y otras fuentes de campos gravitatorios intensos, proporcionando de este modo correcciones relativistas a los cálculos astronómicos.

En el marco de la relatividad general de Einstein, el problema ha conocido una irregular evolución desde la publicación de la teoría: Durante largo tiempo fueron las soluciones estáticas y electrostáticas englobadas en la familia de Weyl [1] las únicas conocidas. Hubo de esperarse casi medio siglo hasta que Kerr obtuvo la primera solución estacionaria, no estática y asintóticamente plana [2] y Ernst redujo el problema a la resolución de dos ecuaciones complejas en derivadas parciales [3], [4] (tan sólo una en ausencia de campo electromagnético). Estos avances relanzaron el proceso de obtención de nuevas soluciones y técnicas algebraicas de generación (En [5] se tiene un magnífico compendio de los resultados obtenidos hasta finales de los setenta). Finalmente en la pasada década se realizó un notable adelanto en la construcción de soluciones exactas que pudieran describir la geometría del espaciotiempo de vacío con las simetrías consideradas (cf. e.g. [6] como revisión del tema). Esto fue posible debido a las diversas técnicas de generación de soluciones a partir de una dada que se desarrollaron para abordar el

problema, como son las transformaciones de Bäcklund [7], [8], [9], el método de la dispersión inversa [10], [11] y las transformaciones HKX [12], [13]. En cuanto a las soluciones interiores de fluido perfecto, el número de soluciones exactas conocidas es bastante limitado. Una referencia actualizada sobre el tema puede ser [14].

Sin embargo todavía estamos lejos de poder implementar a voluntad el comportamiento físico de las soluciones, controlando tan sólo el deseable requerimiento de que el espaciotiempo sea asintóticamente plano, en el caso de exteriores de objetos compactos, aunque recientemente se ha avanzado en el control de los momentos multipolares de las métricas estáticas [15].

No obstante, el número de soluciones conocidas cuyo contenido físico sea atractivo es bastante limitado y, por ello, parece conveniente recurrir a soluciones aproximadas para describir los efectos de la teoría relativista en situaciones de interés astrofísico. Por otra parte, a pesar de que el número de soluciones publicadas haya aumentado, solamente unas pocas han sido interpretadas desde un punto de vista físico y siguen siendo desconocidas las fuentes interiores a las que pudieran corresponder.

En esta memoria se abordan parcialmente estos dos últimos temas. Para ello, como referencia para el trabajo subsiguiente, en el segundo capítulo se desarrolla una formulación del sistema acoplado electro-gravitatorio con las simetrías estacionaria y axial en términos de formas diferenciales, en línea con el formalismo descrito en las referencias [16] y [17] para fluidos perfectos.

Algunas aplicaciones se incluyen en los siguientes capítulos: En el capítulo tercero se introducen nuevas técnicas para el análisis de las magnitudes físicas de las fuentes mínimas de los campos gravitatorio y electromagnético en determinadas situaciones. Se trata de un formalismo alternativo al esquema desarrollado por Israel, [18], [19], para la obtención de densidades de energía-momento y corriente electromagnética en función de las discontinuidades de la curvatura extrínseca y del campo electromagnético, respectivamente, sobre una superficie. Usando este nuevo enfoque [20], [21], más próximo a la teoría del potencial clásica, se pueden calcular densidades superficiales de magnitudes dipolares a partir de las discontinuidades de los potenciales relevantes en la obtención de soluciones exactas. En el capítulo cuarto se aprovecha la libertad gauge presente en el formalismo para extender familias de soluciones exactas ya conocidas.

El capítulo quinto está dedicado a la construcción perturbativa de la solución general asintóticamente plana de vacío axisimétrico estacionario dotado de un plano de reflexión ortogonal al eje de simetría. Como aplicación se

estudia la precesión del perihelio y de la línea de nodos de la trayectoria de una partícula prueba hasta un orden adecuado para que la no linealidad de los momentos multipolares pueda hacerse presente.

Finalmente, el capítulo sexto contiene un estudio de las propiedades globales de la primera solución cosmológica de fluido perfecto con completitud geodésica, obtenida por Senovilla [22] a finales de los ochenta.

Un último capítulo se inserta al final de esta memoria a modo de discusión y recapitulación de los resultados alcanzados.

Capítulo 2

Formulación exterior

2.1 Introducción

Como referencia para los capítulos siguientes, en este capítulo se incluye una descripción de los campos electromagnético y gravitatorio, haciendo uso para ello de formas diferenciales. Se trata por tanto de una extensión del formalismo desarrollado en [16] y [17] para fluidos perfectos. En este formalismo el campo electromagnético toma la forma de un fluido anisótropo. La principal ventaja del uso de formas diferenciales radica en que no estamos forzados a elegir un sistema de coordenadas desde el comienzo y, por tanto, nos concede una mayor libertad a la hora de resolver el sistema de ecuaciones, permitiendo su simplificación de modos muy diversos.

Al final de este capítulo se hará uso de una de estas formas de simplificación para establecer un marco en el que poder reobtener las ecuaciones de Ernst y el cálculo de los momentos multipolares, aparte de otros resultados que por su extensión merecen un tratamiento separado en el próximo capítulo.

2.2 Campos electromagnéticos

Comenzamos, pues, un recordatorio de los conceptos básicos e introducción de la notación que se seguirá a lo largo de esta memoria.

Dado que el tensor energía-momento del campo electromagnético presenta una estructura muy distinta según los valores que tomen los invariantes Lorentz, será conveniente hacer una revisión de la clasificación de los tipos

de campos electromagnéticos en electrodinámica clásica.

Como punto de partida introduciremos un sistema de referencia ortonormal móvil $\{\theta^a\}_{a=0}^3$ de modo que el tensor métrico pueda escribirse como $g = \eta_{ab} \theta^a \otimes \theta^b$, siendo $\eta = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$. De ahora en adelante las primeras letras del alfabeto latino quedarán reservadas para índices que varíen de cero a tres en el espacio de las tétradas, mientras que las las letras en torno a la mitad de dicho alfabeto designarán el mismo tipo de índices referidos a la tríada espacial $\{\theta^i\}_{i=1}^3$. Las letras griegas designarán índices en el espacio tangente a la variedad espaciotemporal. Así, por ejemplo, las formas asociadas a los campos eléctricos y magnéticos adoptarán, respectivamente, las expresiones $E = E_i \theta^i$, $B = B_i \theta^i$ en términos de sus proyecciones ortonormales.

Las expresiones habituales para los tensores de Faraday y Maxwell pueden escribirse en una forma compacta en función de las formas anteriormente definidas y los operadores de dualidad de Hodge $*$ asociados a la téttrada y a la tríada espacial orientadas. El convenio de signos es el empleado en [23]:

$$F = dA = E \wedge \theta^0 + {}^3 * B \quad {}^4 F = -B \wedge \theta^0 + {}^3 * E \quad (2.1)$$

donde A es la 1-forma de conexión o cuadripotencial electromagnético.

A partir de las componentes del tensor de Faraday, el tensor de energía momento electromagnético adopta la siguiente forma:

$$T^a{}_b = \frac{1}{4\pi} \left(F^a{}_c F_b{}^c - \frac{1}{4} \delta^a{}_b F^{cd} F_{cd} \right) \quad (2.2)$$

y dependiendo de los valores que tomen los invariantes Lorentz y gauge que pueden construirse a partir del campo electromagnético:

$$L_1 = E_i B^i \quad L_2 = E_i E^i - B_i B^i \quad (2.3)$$

tenemos los siguientes casos, coincidentes con la clasificación del tensor de Ricci, ya que el tensor de energía-momento electromagnético tiene traza nula:

1. $L_1 = 0$, $L_2 = 0$: Se trata del campo de radiación, el caso más degenerado. El tensor de energía-momento posee cuatro autovalores nulos asociados a dos autovectores espaciales en las direcciones del campo eléctrico y magnético y a dos autovectores de género luz. Si suponemos la existencia de un vector de Killing temporal y otro espacial, como en

la situación que nos ocupa, se puede demostrar la presencia de un vector de Killing nulo [24] adicional y el problema se reduce a la resolución de un laplaciano. Dado que este caso está totalmente resuelto, no se insistirá más sobre él, concentrándonos en el resto.

2. $L_1 = 0, L_2 > 0$ ($L_2 < 0$): En este caso parcialmente degenerado, el tensor de energía-momento puede diagonalizarse por medio de una rotación y un boost de modo que en el sistema de referencia final el campo magnético (eléctrico) sea nulo. Los autovalores tienen todos por valor absoluto $|L_2|/8\pi$, correspondiendo los dos negativos a un autovector de género tiempo y a otro espacial en la dirección del campo eléctrico (magnético).
3. $L_1 \neq 0, L_2 = 0$: En esta otra situación de degeneración parcial, el tensor de esfuerzos puede diagonalizarse en un referencial en el que los campos eléctrico y magnético sean paralelos. Los autovalores tienen por módulo $|L_1|/4\pi$ y los dos negativos están asociados a una dirección de género tiempo y a la dirección de los campos paralelos.
4. $L_1 \neq 0, L_2 \neq 0$: Este es el caso genérico y, como en el anterior, se puede diagonalizar el tensor de esfuerzos de modo que los campos eléctrico y magnético resultantes sean paralelos. El valor absoluto de los autovalores es $\sqrt{4L_1^2 + L_2^2}/8\pi$. Del mismo modo que en el caso anterior, los autovalores negativos corresponden a un autovector temporal y a la dirección en la que los campos eléctrico y magnético son paralelos.

Como ya se había anunciado, el tensor de esfuerzos electromagnético (salvo para la radiación) es análogo al de un fluido anisótropo de densidad igual al módulo de la presión, $\mu = |p_i| = \sqrt{4L_1^2 + L_2^2}/8\pi$. Esta analogía será explotada para extender al campo electromagnético el formalismo de fluidos perfectos desarrollado en [16] y [17].

Para ello, una vez impuesto el grupo de isometrías engendrado por los vectores de Killing temporal y axial $\{\partial_t, \partial_\phi\}$, escogemos $\{\theta^0, \theta^1\}$ de modo que tengan proyección únicamente sobre el espacio de órbitas de estos vectores, mientras $\{\theta^2, \theta^3\}$ proyectan exclusivamente en el espacio ortogonal. También a modo de simplificación nos restringiremos a campos eléctricos y magnéticos cuya proyección sobre el espacio de órbitas sea nula. Esto nos permitirá factorizar las cantidades cinemáticas de acuerdo a su dependencia en las

formas diferenciales θ^a para expresar el conjunto de ecuaciones como un sistema exterior en diferenciales de 1-formas exclusivamente.

Para diagonalizar parcialmente el tensor de esfuerzos, se puede escoger la componente temporal, θ^0 , de la tétrada de forma que sea paralela a la dirección definida localmente por el autovector temporal de dicho tensor. No obstante, de momento dejaremos libre la elección de esta forma diferencial. La forma $u = -\theta^0$ puede interpretarse como la forma de velocidad del “fluido maxwelliano”. El signo negativo es preciso para compatibilizar los convenios usuales de que la tétrada y el vector 4-velocidad estén orientadas apuntando hacia el futuro. Obviamente θ^1 queda determinada como la forma ortogonal a θ^0 en el espacio engendrado por los campos de Killing.

Definiendo el dual de Hodge bidimensional en el espacio ortogonal a las órbitas del grupo de isometrías de la siguiente manera:

$$*\theta^2 = \theta^3 \quad *\theta^3 = -\theta^2 \quad (2.4)$$

podremos escribir las 2-formas de Faraday y Maxwell de una forma más compacta sin necesidad de emplear duales tridimensionales:

$$F = -E \wedge u + *B \wedge \theta^1 \quad {}^4 * F = B \wedge u + *E \wedge \theta^1 \quad (2.5)$$

2.3 Ecuaciones de estructura

Hasta el momento la tétrada ortonormal no ha sufrido más limitación que la exigencia impuesta de que sea diagonal por cajas. Dado que este formalismo persigue la descripción del conjunto de las ecuaciones de Einstein como un sistema exterior, habrá que imponer sobre la tétrada la condición de que esté libre de torsión, lo cual se garantiza con el cumplimiento de las primeras ecuaciones de estructura de Cartan:

$$d\theta^a + \Gamma^a_b \wedge \theta^b = 0 \quad (2.6)$$

donde $\Gamma^a_b = \gamma^a_{bc} \theta^c$ representa las 1-formas de la conexión compatible con la métrica, escritas en función de los coeficientes, γ^a_{bc} , de rotación de Ricci. Recordemos que la condición de compatibilidad con la métrica:

$$d\eta_{ab} = \Gamma_{(ab)} \quad (2.7)$$

se traduce en la antisimetría de los índices de la conexión debido a la elección de una η rígida.

Reagrupando los términos de la derivada exterior de la velocidad u , podremos dar una interpretación a algunas de las formas que aparecen en las ecuaciones de Cartan:

$$du = -d\theta^0 = -\Gamma_{0i} \wedge \theta^i = -\gamma_{0ia} \theta^a \wedge \theta^i = a \wedge u - W \quad (2.8)$$

donde $a = -\gamma_{0i0} \theta^i$ es la aceleración del fluido y $W = -\gamma_{0ij} \theta^i \wedge \theta^j$ es la 2-forma de vorticidad que se obtiene a partir del tensor de vorticidad.

Es frecuente definir un vector de vorticidad ω a partir del tensor de vorticidad haciendo uso del dual tridimensional. En lenguaje de formas diferenciales esta relación se expresa:

$$\omega = -{}^3 * W \quad (2.9)$$

En el caso que nos ocupa, la exigencia de que u tenga proyección no nula tan sólo sobre el espacio de las órbitas del grupo de isometrías permitirá factorizar la 2-forma de vorticidad:

$$W = \theta^1 \wedge w \quad (2.10)$$

De estas dos últimas relaciones se deduce fácilmente que la 1-forma w no es más que el dual en el espacio definido por $\theta^2 - \theta^3$ de la 1-forma de vorticidad ω :

$$w = *\omega \quad (2.11)$$

También será conveniente introducir otra 1-forma b en el espacio $\theta^2 - \theta^3$ relacionada con la variación del logaritmo del elemento de volumen en el espacio de órbitas de los campos de Killing:

$$d(\theta^0 \wedge \theta^1) = b \wedge (\theta^0 \wedge \theta^1) \quad (2.12)$$

Con estas definiciones procedemos a reescribir las ecuaciones de estructura, después de eliminar los términos nulos y factorizar las dependencias en θ^0 y θ^1 . El cambio de notación respecto a [16], [17] se limita a tomar como componente temporal de la tétrada la velocidad con signo negativo en vez de positivo, por las razones ya expuestas:

$$du = a \wedge u + w \wedge \theta^1 \quad (2.13)$$

$$d\theta^1 = (b - a) \wedge \theta^1 + s \wedge u \quad (2.14)$$

$$d\theta^2 = -\nu \wedge \theta^3 \quad (2.15)$$

$$d\theta^3 = \nu \wedge \theta^2 \quad (2.16)$$

donde s es una 1-forma asociada con el tensor de deformación del fluido de manera análoga a como w está relacionada con el tensor de vorticidad [16], [17] y ν es simplemente la conexión en el espacio engendrado por θ^2 y θ^3 .

2.4 Identidades de Bianchi

Las identidades de Bianchi, condiciones de integrabilidad para las ecuaciones de estructura, se obtienen ahora de forma sencilla mediante derivación exterior del anterior sistema de ecuaciones y factorización de los coeficientes de θ^0 y θ^1 :

$$db = 0 \quad (2.17)$$

$$da = w \wedge s \quad (2.18)$$

$$dw = -(b - 2a) \wedge w \quad (2.19)$$

$$ds = (b - 2a) \wedge s \quad (2.20)$$

2.5 Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío para las 2-formas de Faraday y Maxwell:

$$F = -E \wedge u + *B \wedge \theta^1 \quad (2.21)$$

$${}^4 * F = B \wedge u + *B \wedge \theta^1 \quad (2.22)$$

$$dF = 0 \quad d^4 * F = 0 \quad (2.23)$$

se pueden escribir ahora utilizando las 1-formas cinemáticas introducidas en las secciones previas:

$$dE - E \wedge a + *B \wedge s = 0 \quad (2.24)$$

$$d * B + E \wedge w - *B \wedge (b - a) = 0 \quad (2.25)$$

$$d * E - B \wedge w - *E \wedge (b - a) = 0 \quad (2.26)$$

$$dB - B \wedge a - *E \wedge s = 0 \quad (2.27)$$

Como es sabido, las ecuaciones provenientes de $d^4 * F = 0$ no son una consecuencia directa de las condiciones de integrabilidad de las ecuaciones de Einstein (segundas identidades de Bianchi) salvo en el caso de que el escalar Lorentz L_1 sea distinto de cero. Por tanto, en general las ecuaciones de Maxwell contienen más información que la que nos proporcionan las segundas identidades de Bianchi.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de una manera más compacta si definimos una 1-forma compleja f tal que:

$$f = E + iB \quad (2.28)$$

La nueva expresión de las ecuaciones queda del siguiente modo:

$$df = -a \wedge f - is \wedge *f \quad (2.29)$$

$$d * f = (a - b) \wedge *f + iw \wedge f \quad (2.30)$$

que será de gran utilidad a la hora de reducir el sistema exterior a las ecuaciones de Ernst.

2.6 Ecuaciones de Einstein

Finalmente, las ecuaciones de Einstein para el tensor de esfuerzos del campo electromagnético, en unidades geometrizadas:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.31)$$

se pueden escribir en función de las 1-formas cinemáticas y sus duales si introducimos previamente una operador lineal de reflexión \sim en el espacio definido por θ^2 y θ^3 :

$$\tilde{\theta}^2 = \theta^2 \quad \tilde{\theta}^3 = -\theta^3 \quad (2.32)$$

$$d*(w-s) + 2a \wedge *w + 2(a-b) \wedge *s = 4E \wedge B = 2if \wedge \bar{f} \quad (2.33)$$

$$d*a + b \wedge *a + \frac{1}{2}w \wedge *w - \frac{1}{2}s \wedge *s = E \wedge *E + B \wedge *B = \bar{f} \wedge *f \quad (2.34)$$

$$d*b + b \wedge *b = 0 \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{b} + b \wedge \tilde{b} - \frac{1}{2}(s-w) \wedge (\tilde{s} - \tilde{w}) + 2a \wedge \tilde{a} - 2b \wedge \tilde{a} + \\ + 2\nu \wedge \tilde{b} = 2E \wedge \tilde{E} + 2B \wedge \tilde{B} = 2\bar{f} \wedge \tilde{f} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} d*\tilde{b} + b \wedge *\tilde{b} - \frac{1}{2}(s-w) \wedge *(\tilde{s} - \tilde{w}) + 2a \wedge *\tilde{a} - 2b \wedge *\tilde{a} - \\ - 2\nu \wedge \tilde{b} = 2E \wedge *\tilde{E} + 2B \wedge *\tilde{B} = 2\bar{f} \wedge *\tilde{f} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$d\nu + a \wedge *b - a \wedge *a + \frac{1}{4}(s-w) \wedge *(s-w) = 0 \quad (2.38)$$

La ecuación (2.35) y su simétrica entre las ecuaciones de estructura (2.17) se pueden integrar fácilmente para introducir las coordenadas pseudocilíndricas de Weyl $\{\rho, z\}$:

$$b = d \ln \rho \quad *b = -\frac{1}{\rho} dz \quad (2.39)$$

Igual que sucede en el caso de vacío, las ecuaciones (2.36-2.38) pueden dejarse para integrar al final del proceso, ya que la conexión ν que se puede obtener de forma algebraica a partir de las dos primeras satisface la ecuación (2.38) automáticamente si se verifica el resto del sistema exterior.

2.7 Simplificaciones

Habida cuenta de que la integrabilidad de las ecuaciones de estructura queda asegurada por el cumplimiento de las identidades de Bianchi, el sistema de ecuaciones cuya integración resuelve el problema de hallar soluciones exactas se reduce a:

$$db = 0 \quad (2.40)$$

$$da = w \wedge s \quad (2.41)$$

$$ds = (b - 2a) \wedge s \quad (2.42)$$

$$dw = -(b - 2a) \wedge w \quad (2.43)$$

$$df = -a \wedge f - is \wedge *f \quad (2.44)$$

$$d*f = (a - b) \wedge *f + iw \wedge f \quad (2.45)$$

$$d*(w - s) + 2a \wedge *w + 2(a - b) \wedge *s = 2if \wedge \bar{f} \quad (2.46)$$

$$d*a + b \wedge *a + \frac{1}{2}w \wedge *w - \frac{1}{2}s \wedge *s = \bar{f} \wedge *f \quad (2.47)$$

$$d*b + b \wedge *b = 0 \quad (2.48)$$

El resto de ecuaciones se reduce a cuadraturas una vez integrado este sistema.

Es patente que aún queda bastante libertad gauge que puede utilizarse en una forma u otra para simplificar el sistema de ecuaciones. Por ejemplo, la elección de θ^2 y θ^3 todavía no ha sido definida, permitiéndonos realizar rotaciones $SO(2)$ en ese plano, sin que por ello se modifique la estructura de las ecuaciones. También resta la ambigüedad en la elección de θ^0 , que se traduce en un grupo gauge $SO(1,1)$ de boosts en el espacio de las órbitas de los Killing. Según el tipo de simplificación que se desee realizar, este remanente de libertad puede aprovecharse de varios modos:

1. Trivialización de alguna de las cantidades cinemáticas: Podemos realizar un boost de modo que el “fluido” sea rígido o irrotacional, por ejemplo. La simplificación es clara, ya que en cualquiera de estos dos casos la aceleración se torna una diferencial exacta.
2. Diagonalización del tensor de esfuerzos: Por medio de un boost podemos lograr que los campos eléctrico y magnético sean paralelos, con lo cual conseguimos eliminar la dependencia de los campos en la ecuación (2.46) para la vorticidad y la deformación.

Según las aplicaciones que tengamos en mente, se elegirá la manera de simplificar.

2.8 Ecuaciones de Ernst

Un tipo de boost que siempre puede realizarse preservando la estructura de las ecuaciones es aquel que nos lleva a un referencial en el cual la velocidad u está libre de deformación ($s = 0$). Las ecuaciones que describen esta transformación son:

$$u' = \cosh \lambda u + \sinh \lambda \theta^1 \quad (2.49)$$

$$\theta^{1'} = \sinh \lambda u + \cosh \lambda \theta^1 \quad (2.50)$$

$$d\lambda = \cosh \lambda \sinh \lambda (b' - 2a') + \cosh^2 \lambda s' - \sinh^2 \lambda w' \quad (2.51)$$

La ecuación para la diferencial del parámetro del boost, λ , proviene de la condición $s = 0$.

Por su parte el campo electromagnético varía de la siguiente forma:

$$E = \cosh \lambda E' - \sinh \lambda * B' \quad (2.52)$$

$$B = \cosh \lambda B' + \sinh \lambda * E' \quad (2.53)$$

Esta transformación es compatible con todo el sistema de ecuaciones, al igual que sucede en el caso de vacío sin campo electromagnético [17]. Por tanto no hay pérdida de generalidad si tomamos $s = 0$ desde el comienzo. Este acostumbra a ser el tipo de referencial en el que se presentan las soluciones exactas.

Las simplificaciones obtenidas de este modo permiten reducir el número de ecuaciones:

$$db = 0 \quad (2.54)$$

$$da = 0 \quad (2.55)$$

$$dw = -(b - 2a) \wedge w \quad (2.56)$$

$$df = -a \wedge f \quad (2.57)$$

$$d * f = (a - b) \wedge * f + iw \wedge f \quad (2.58)$$

$$d * w + 2a \wedge * w = 2if \wedge \bar{f} \quad (2.59)$$

$$d * a + b \wedge * a + \frac{1}{2} w \wedge * w = \bar{f} \wedge * f \quad (2.60)$$

$$d * b + b \wedge * b = 0 \quad (2.61)$$

Las ecuaciones (2.55-2.57) se pueden integrar formalmente haciendo uso de funciones todavía arbitrarias, U , A , Φ , además de las ya consabidas ecuaciones para b y su dual, que introducen las coordenadas de Weyl (2.39), o simplemente dos funciones relacionadas por el dual de sus diferenciales si es que queremos trabajar en otro sistema de coordenadas:

$$a = dU \quad (2.62)$$

$$w = \rho^{-1} e^{2U} dA \quad (2.63)$$

$$f = -e^{-U} d\Phi \quad (2.64)$$

$$*d\rho = -dz \quad (2.65)$$

La ecuación (2.59) se puede integrar también, obteniéndose una nueva diferencial exacta [4] que define el llamado potencial de “twist” χ :

$$d\chi = e^{2U} *w + 2i\bar{\Phi}d\Phi \quad (2.66)$$

con el cual se define el potencial complejo de Ernst de la siguiente forma:

$$\varepsilon = e^{2U} + i\chi \quad (2.67)$$

$$\mathcal{R}\varepsilon = e^{2U} - \bar{\Phi}\Phi \quad (2.68)$$

Como se verá posteriormente, este potencial es real para soluciones estáticas y complejo en caso contrario.

Si sustituimos (2.64) en (2.58) obtenemos una ecuación elíptica para el potencial escalar complejo electromagnético Φ , la cual es la condición de integrabilidad para las ecuaciones de Maxwell en espacio curvo:

$$d * d\Phi + b \wedge *d\Phi = \frac{1}{\mathcal{R}\varepsilon + \Phi\bar{\Phi}} \{d\varepsilon + 2\bar{\Phi}d\Phi\} \wedge *d\Phi \quad (2.69)$$

Por su parte esta ecuación combinada con las ecuaciones para la aceleración (2.60), (2.62) y con las ecuaciones para la vorticidad (2.56) y (2.66), nos permiten expresar sus condiciones de integrabilidad como la parte real e imaginaria de otra ecuación elíptica, la ecuación de Ernst:

$$d * d\varepsilon + b \wedge *d\varepsilon = \frac{1}{\mathcal{R}\varepsilon + \Phi\bar{\Phi}} \{d\varepsilon + 2\bar{\Phi}d\Phi\} \wedge *d\varepsilon \quad (2.70)$$

Todo el conjunto de ecuaciones para el vacío electromagnético estacionario y axial se reduce a esta pareja de ecuaciones para los potenciales complejos ε y Φ [4] si trabajamos en coordenadas de Weyl. El resto de ecuaciones se

resuelven por cuadraturas, garantizada su integrabilidad por las dos ecuaciones de Ernst. Si trabajamos en otro sistema de coordenadas, $\{x^1, x^2\}$, que no sea el de Weyl, habrá que hallar además dos funciones $\rho(x^1, x^2)$, $z(x^1, x^2)$ que verifiquen (2.65).

La integración de las ecuaciones de estructura (2.13) y (2.14) y la elección de θ^2 y θ^3 de modo que sean paralelas a $*b$ y a b respectivamente permite escribir la tétrada del siguiente modo:

$$\theta^0 = e^U (dt - A d\phi) \quad \theta^1 = e^{-U} \rho d\phi \quad (2.71)$$

$$\theta^2 = e^{\gamma-U} dz \quad \theta^3 = e^{\gamma-U} d\rho \quad (2.72)$$

con lo cual la métrica adopta la siguiente forma:

$$ds^2 = -e^{2U} (dt - Ad\phi)^2 + e^{-2U} \{e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2\} \quad (2.73)$$

La función métrica U se calcula fácilmente a partir de la parte real del potencial de Ernst:

$$e^{2U} = \frac{\varepsilon + \bar{\varepsilon}}{2} + \Phi \bar{\Phi} \quad (2.74)$$

mientras que el potencial de twist se obtiene como diferencia del módulo del vector de Killing temporal respecto del potencial de Ernst:

$$\chi = i(e^{2U} - \varepsilon) \quad (2.75)$$

Finalmente las restantes funciones A y γ son el resultado de las siguientes cuadraturas:

$$dA = \rho e^{-4U} (2i\bar{\Phi} * d\Phi - *d\chi) \quad (2.76)$$

$$d\gamma \wedge b = -a \wedge \tilde{a} + \frac{1}{4} w \wedge \tilde{w} + \bar{f} \wedge \tilde{f} \quad (2.77)$$

$$d\gamma \wedge *b = -a \wedge *\tilde{a} + \frac{1}{4} w \wedge *\tilde{w} + \bar{f} \wedge *\tilde{f} \quad (2.78)$$

donde hemos orientado θ^3 paralela a b .

Con lo cual queda concluida la construcción de la métrica a partir de una solución de las ecuaciones de Ernst.

Otra forma habitual de los potenciales, que será útil a la hora de calcular los momentos multipolares de los campos es la siguiente:

$$\varepsilon = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \quad (2.79)$$

$$\Phi = \frac{q}{1 + \xi} \quad (2.80)$$

En términos de estos potenciales las ecuaciones de Ernst adoptan la siguiente forma:

$$(\bar{\xi} \xi - \bar{q} q - 1) (d * d\xi + b \wedge * d\xi) = 2 (\bar{\xi} d\xi - \bar{q} dq) \wedge * d\xi \quad (2.81)$$

$$(\bar{\xi} \xi - \bar{q} q - 1) (d * dq + b \wedge * dq) = 2 (\bar{\xi} d\xi - \bar{q} dq) \wedge * dq \quad (2.82)$$

2.9 Momentos multipolares

En esta sección se incluye una rápida revisión de la definición de los momentos multipolares en relatividad general, puesto que serán necesarios en capítulos subsiguientes.

Ante la dificultad que presenta calcular los momentos multipolares de una distribución de materia [25], nos concentraremos en los momentos del campo lejano. El primer tratamiento completo de los momentos gravitacionales de un campo estacionario se debe a Geroch y Hansen [26], [27] y la inclusión en el formalismo de los momentos electromagnéticos fue lograda por Simon [28]. En esta revisión seguiremos de cerca la referencia [29].

En primer lugar definiremos una métrica auxiliar h en el espacio de órbitas del campo de Killing estacionario:

$$h = f({}^4g + \theta^0 \otimes \theta^0) \quad (2.83)$$

donde f representa la norma del vector de Killing temporal (e^{2U} en la sección anterior).

Diremos que una variedad métrica (\mathcal{M}, h) es asintóticamente plana si existe otra variedad $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{h})$ tal que $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \Lambda$ (inclusión del punto del infinito, Λ) y las métricas están relacionadas por una transformación conforme:

$$\tilde{h} = \Omega^2 h \quad (2.84)$$

$$\Omega|_{\Lambda} = \Omega|_{\alpha}|_{\Lambda} = (\Omega|_{\alpha\beta} - 2\tilde{h}_{\alpha\beta})|_{\Lambda} = 0 \quad (2.85)$$

donde denotamos la derivada covariante respecto a \tilde{h} por una barra.

A su vez los potenciales ξ , q se transforman del siguiente modo:

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{\Omega}} \quad \tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{\Omega}} \quad (2.86)$$

A partir de estos potenciales transformados se calculan dos sucesiones de tensores cuyas propiedades recuerdan las de los momentos multipolares newtonianos:

$$P = \tilde{\xi} \quad P_{\alpha} = P_{,\alpha} \quad (2.87)$$

$$P_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}} = C(P_{\alpha_1 \dots \alpha_n | \alpha_{n+1}} - \frac{n}{2}(2n-1)\tilde{R}_{\alpha_1 \alpha_2} P_{\alpha_3 \dots \alpha_{n+1}}) \quad (2.88)$$

$$Q = \tilde{q} \quad Q_{\alpha} = Q_{,\alpha} \quad (2.89)$$

$$Q_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}} = C(Q_{\alpha_1 \dots \alpha_n | \alpha_{n+1}} - \frac{n}{2}(2n-1)\tilde{R}_{\alpha_1 \alpha_2} Q_{\alpha_3 \dots \alpha_{n+1}}) \quad (2.90)$$

donde el símbolo C denota la operación de tomar la parte totalmente simétrica libre de traza.

Los momentos multipolares pueden calcularse como los valores de estos campos tensoriales en el punto Λ . La partes real e imaginaria de los momentos P corresponden respectivamente a los momentos de masa y rotacionales, estos últimos sin equivalente clásico. Por su parte, las partes real e imaginaria de los momentos Q son los momentos eléctricos y magnéticos, respectivamente.

El cálculo de estos momentos es laborioso, pero se facilita en el caso de que la simetría axial esté presente, ya que en este caso los momentos quedan totalmente determinados por sus proyecciones sobre el eje, cuya tangente unitaria es n :

$$P_n = \frac{1}{n!} P_{\alpha_1 \dots \alpha_n} n^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n} |_{\Lambda} \quad (2.91)$$

$$Q_n = \frac{1}{n!} Q_{\alpha_1 \dots \alpha_n} n^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n} |_{\Lambda} \quad (2.92)$$

Y dado que los potenciales quedan definidos por su valor en el eje, quedan caracterizados por los coeficientes del desarrollo en coordenadas de Weyl:

$$\xi(\rho = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{z^{n+1}} \quad q(\rho = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{z^{n+1}} \quad (2.93)$$

La métrica h en coordenadas de Weyl de la variedad \mathcal{M} tiene la forma:

$$h(dx, dx) = e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2 \quad (2.94)$$

Un cambio de coordenadas y una transformación conforme nos llevan a la variedad $\tilde{\mathcal{M}}$:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2} \quad \tilde{z} = \frac{z}{\rho^2 + z^2} \quad (2.95)$$

$$\Omega = \tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2 \quad (2.96)$$

Sobre la cual podemos calcular las expresiones para los primeros momentos multipolares:

$$P_n = C_n \quad n = 0..3 \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} P_4 &= C_4 - \frac{1}{7}\bar{C}_0(C_2 C_0 - C_1^2) + \frac{8}{105}\bar{H}_1 \bar{C}_0 C_0 (C_1 H_0 - C_0 H_1) - \\ &- \frac{3}{70}\bar{H}_1 (C_1 H_0 - C_0 H_1) - \frac{8}{105}\bar{C}_1 \bar{H}_0 C_0 (C_1 H_0 - C_0 H_1) + \\ &+ \frac{1}{7}\bar{H}_0 (C_2 H_0 - C_1 H_1) \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$Q_n = H_n \quad n = 0..3 \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= H_4 + \frac{1}{7}\bar{H}_0 (H_2 H_0 - H_1^2) + \frac{8}{105}\bar{H}_1 \bar{C}_0 H_0 (C_1 H_0 - C_0 H_1) - \\ &- \frac{3}{70}\bar{C}_1 (C_1 H_0 - C_0 H_1) - \frac{8}{105}\bar{C}_1 \bar{H}_0 H_0 (C_1 H_0 - C_0 H_1) - \\ &- \frac{1}{7}\bar{C}_0 (C_2 H_0 - C_1 H_1) \end{aligned} \quad (2.100)$$

La complejidad de las expresiones para los momentos multipolares no sólo aumenta rápidamente a partir del octupolo, sino que ni siquiera se dispone de una expresión general que permita calcularlos todos de forma recursiva.

Cuando la variedad \mathcal{M} posee un plano de simetría ortogonal al eje z , los momentos multipolares de orden par son reales y los de orden impar son imaginarios puros, correspondiendo respectivamente a los momentos gravitacionales y eléctricos por un lado y a los momentos rotacionales y magnéticos por otro.

En el capítulo quinto se mostrarán dos situaciones, las cuales, en principio, pueden servir para medir los momentos multipolares del campo lejano hasta un orden adecuado como para que la no linealidad de dichos momentos se haga patente.

Capítulo 3

Densidades de magnitudes físicas

3.1 Introducción

El problema de encontrar una solución interior de fluido perfecto que pueda continuarse de forma suave con una solución exterior de vacío dada (que sea sintóticamente plana) es sin duda uno de los grandes retos, no sólo de la gravitación einsteiniana, sino también de la newtoniana, donde tampoco abundan los problemas completos resueltos: Hasta la fecha no se ha podido encontrar una fuente compacta físicamente razonable para solución alguna de vacío estacionaria no estática con los requerimientos anteriores.

En este capítulo seremos menos ambiciosos y, en vez de buscar fuentes extensas en volumen, nos ocuparemos de las fuentes mínimas, es decir de capas finas materiales cuyas propiedades físicas puedan calcularse a partir de la solución de vacío exterior. Más bien nos interesaremos por la construcción de densidades para las magnitudes físicas relevantes para estas fuentes, como son la masa, el momento angular, la carga eléctrica y el momento magnético.

En primer lugar revisaremos los enfoques tradicionales por el cálculo de estas densidades, como son el formalismo de Israel y las integrales de Komar, para después introducir un nuevo tratamiento del problema y aplicarlo a algunas soluciones exactas.

3.2 Formalismo de Israel

3.2.1 Masa y momento angular

En esta sección revisaremos el formalismo de Israel para la construcción de fuentes de soluciones de vacío. A fin de introducir la notación a emplear, precisamos recordar brevemente la dinámica de capas finas, que es conocida ya desde los orígenes de la teoría [30], [18]:

Supongamos una capa material situada sobre una hipersuperficie espacial Σ que posea las simetrías de la variedad espaciotemporal estacionaria asintóticamente plana en la que está incrustada. Las ecuaciones de Einstein nos permiten conocer el tensor de esfuerzos $S_{\mu\nu}$ del material a partir de la diferencia entre la curvatura extrínseca $[K_{\mu\nu}]$ en ambas caras de la hipersuperficie al cruzar esta en la dirección definida por el vector unitario normal n :

$$8\pi S_{\mu\nu} = [K_{\mu\nu}] - g_{\mu\nu} [K] \quad (3.1)$$

si tomamos la siguiente definición para la curvatura extrínseca:

$$K_{\mu\nu} = -n_{\alpha;\beta} e_{\mu}^{\alpha} e_{\nu}^{\beta} \quad (3.2)$$

donde se denota por punto y coma la derivada covariante respecto a la 4-métrica y $e_{\mu}^{\alpha} = \partial x^{\alpha} / \partial y^{\mu}$ realiza el incrustamiento de la hipersuperficie Σ de coordenadas intrínsecas y^{μ} en la variedad espaciotemporal, cuyas coordenadas se designan por x^{α} .

Siguiendo el tratamiento de [31], utilizaremos un sistema de coordenadas $\{t, x^1, x^2, x^3\}$ en el que el campo de Killing estacionario tenga la forma ∂_t . Las hipersuperficies de tiempo constante se denotarán por V_3 y están divididas en dos partes, exterior V_3^+ e interior V_3^- , por la hipersuperficie Σ , que supondremos cerrada. Esto no supone pérdida de generalidad, ya que siempre podemos completar de forma adecuada la superficie Σ . La intersección de Σ con V_3 será designada como S y la normal n seguirá siendo la normal de S con una adecuada elección de coordenada temporal.

De acuerdo con el teorema de la divergencia, la integral de un vector X^{μ} sin dependencia temporal se puede expresar como:

$$\int_{V_3=V_3^+ \cup V_3^-} \partial_{\alpha}(\sqrt{g} X^{\alpha}) dx^1 dx^2 dx^3 =$$

$$= \int_{S^2(\infty)} X^\alpha n_\alpha dS^2(\infty) - \int_S [X^\alpha n_\alpha] dS \quad (3.3)$$

siendo $g = -{}^4g g^{00}$ el determinante de la métrica sobre las hipersuperficies $t = \text{const}$. La esfera en el infinito espacial ha sido denotada por $S^2(\infty)$.

Con la elección $X^\alpha = (-g^{00})^{-1/2} \xi^{\alpha;0}$, donde ξ es un vector de Killing, el integrando toma la siguiente forma, teniendo en cuenta la ecuación de Killing ($\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$) y la reglas de Ricci para la conmutación de derivadas:

$$\partial_\alpha(\sqrt{g} X^\alpha) = \sqrt{-{}^4g} \xi^\alpha R_\alpha^0 \quad (3.4)$$

Por su parte, dado que los campos de Killing son ortogonales a la normal de la superficie S , tenemos que:

$$X^\alpha n_\alpha|_S = -(-g^{00})^{-1/2} \xi^\alpha n_\alpha^0 = (-g^{00})^{-1/2} \xi^\mu e_\nu^0 K_\mu^\nu \quad (3.5)$$

expresión que se simplifica bastante si escogemos $y^0 = t$ como coordenada intrínseca.

Denotando la integral en el infinito como C , los resultados anteriores se reúnen en la siguiente expresión:

$$C = \int_{V_3} ({}^{-4}g)^{-1/2} R_\alpha^0 \xi^\alpha \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 + \int_S ({}^{-4}g)^{-1/2} [K_\mu^0] \xi^\mu dS \quad (3.6)$$

La integral C se puede calcular teniendo en cuenta que la planitud de la métrica en el infinito implica:

$$g_{00} = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) + O(r^{-2}) \quad (3.7)$$

$$g_{0\phi} = - \frac{2J \sin^2 \theta}{r} + O(r^{-2}) \quad (3.8)$$

siendo m y J respectivamente la masa y el momento angular total de la fuente.

Para ξ , aparte del Killing estacionario, consideraremos también un Killing axial:

1. Killing estacionario ∂_t : La integral C vale $-4\pi m$. En coordenadas adaptadas de modo que el vector unitario normal a la superficie sea

proporcional a ∂_{x^1} sobre esta, obtenemos una expresión para la masa de la capa material utilizando la condición de pegado (3.1):

$$m = - \int_{V_3} (-^4g)^{-1/2} (T_0^0 - T_3^3 - T_2^2 - T_1^1) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 - \int_S (-^4g)^{-1/2} (S_0^0 - S_3^3 - S_2^2) dS \quad (3.9)$$

2. Killing axial ∂_ϕ : La integral C vale $8\pi J$ y el momento angular resulta ser:

$$J = \int_{V_3} (-^4g)^{-1/2} T_\phi^0 \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 + \int_S (-^4g)^{-1/2} S_\phi^0 dS \quad (3.10)$$

En el caso de vacío, $T_{\mu\nu} = 0$, obtenemos expresiones que dependen tan sólo de integrales de superficie. Podemos en este caso interpretar los integrandos como densidades superficiales efectivas de masa y momento angular:

$$\sigma_m = (-^4g)^{-1/2} (S_3^3 + S_2^2 - S_0^0) \quad (3.11)$$

$$\sigma_J = (-^4g)^{-1/2} S_\phi^0 \quad (3.12)$$

3.2.2 Carga eléctrica

El mismo tipo de formalismo [19] puede utilizarse para el vacío electromagnético estacionario para obtener la densidad de corriente superficial j situada sobre la superficie S .

Para ello tomaremos como coordenada x^1 la distancia geodésica normal a la capa material, mientras que el resto de coordenadas x^α coincidirán con las intrínsecas de mismo número sobre la hipersuperficie Σ .

De este modo, las ecuaciones de Maxwell se pueden expresar en función de distribuciones:

$$\partial_\beta (\sqrt{-^4g} F^{\alpha\beta}) = 4\pi \sqrt{-^4g} J^\alpha = 4\pi \sqrt{-^4g} j^\alpha \delta(x^1) \quad (3.13)$$

que una vez integrada a todo el espacio V_3 nos da una relación entre el salto del campo electromagnético y la densidad superficial de corriente:

$$[e_\mu^\alpha F_{\alpha\beta} n^\beta] = 4\pi j_\mu \quad (3.14)$$

Para un campo electromagnético que sea asintóticamente como el creado por una carga eléctrica e y un dipolo magnético M en la dirección z , las componentes del cuadripotencial se comportarán de la siguiente manera:

$$A_0 = -\frac{e}{r} + O(r^{-2}) \quad (3.15)$$

$$A_\phi = \frac{M \sin^2 \theta}{r} + O(r^{-2}) \quad (3.16)$$

De forma similar a como se hizo en la sección anterior, la integración a todo el espacio V_3 de las ecuaciones de Maxwell nos proporciona dos igualdades:

$$e = \int_S (-g^{00})^{-1/2} j^0 dS \quad (3.17)$$

$$0 = \int_S (-g^{00})^{-1/2} j^\phi dS \quad (3.18)$$

que nos permiten extraer una densidad superficial efectiva de carga eléctrica pero no de momento dipolar magnético:

$$\sigma_e = (-g^{00})^{-1/2} j^0 \quad (3.19)$$

El resultado que subyace en este formalismo tiene su origen en un antiguo trabajo de Tolman [32] en el que se muestran fórmulas integrales para la masa y el momento angular para fuentes extensas:

$$m = \int_{fuente} (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) \sqrt{-4g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.20)$$

$$J = \int_{fuente} (T_3^0) \sqrt{-4g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.21)$$

El formalismo de Israel sería la inclusión de fuentes superficiales en estas fórmulas de Tolman.

Existe una generalización ulterior debida a López que permite la inclusión de fuentes distribucionales [33].

3.3 Integrales de Komar

En esta sección describiremos otro procedimiento [34] para construir densidades superficiales de magnitudes físicas:

Consideremos una transformación infinitesimal de coordenadas generada por un campo ξ :

$$X'^{\alpha} = X^{\alpha} + \xi^{\alpha} \quad (3.22)$$

Dado que la teoría es invariante bajo transformaciones de coordenadas, existe un flujo conservado descrito por:

$$E^{\alpha}(\xi) = (\xi^{\alpha;\beta} - \xi^{\beta;\alpha})_{;\beta} \quad (3.23)$$

que es de divergencia nula.

Si particularizamos para el caso en el que ξ es un generador de una isometría:

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 \quad (3.24)$$

obtenemos la siguiente expresión para el flujo conservado, después de utilizar la regla de Ricci de conmutación de derivadas covariantes:

$$E^{\alpha}(\xi) = -2 \xi^{\beta} R_{\beta}^{\alpha} \quad (3.25)$$

En esta última expresión se manifiesta que el flujo conservado se anula en el vacío no electromagnético.

Consideremos una hipersuperficie de tiempo constante sobre la cual construiremos la cantidad conservada $E(\xi)$:

$$E(\xi) = \int E^{\alpha} n_{\alpha} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = \int E^0 \sqrt{-^4 g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.26)$$

siendo $n = \sqrt{-^4 g^{00}} dt$ la forma ortogonal a las hipersuperficies de tiempo constante y g el determinante de la métrica inducida sobre ellas.

Como el integrando es a su vez una divergencia, podemos reducir el orden de la integral y obtener una expresión independiente de la superficie, S , sobre la que se integra, siempre que esta englobe todas las regiones donde hay materia:

$$E(\xi) = \int_S dS n_\mu (\xi^{0;\mu} - \xi^{\mu;0}) \sqrt{-4 g^{00}} = \int_S dS_{\mu\nu} (\xi^{\mu;\nu} - \xi^{\nu;\mu}) \quad (3.27)$$

A esta última expresión se la conoce como integral de Komar y conduce a cantidades conservadas para cada campo de Killing ξ . Nos dará la masa para el Killing estacionario y el momento angular para el Killing axial. Si hacemos coincidir la superficie S con la frontera de la fuente material superficial, nos proporcionará también una expresión para la densidad de la magnitud conservada.

Un enfoque similar es el realizado por Trautman [35] basándose en la siguiente ley de conservación:

$$(\xi^\alpha T_\alpha^\beta)_{;\beta} = 0 \quad (3.28)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación de Killing (3.24) y la conservación del tensor de esfuerzos:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Einstein, esta corriente conservada es esencialmente la misma que la de Komar si el tensor de esfuerzos tiene traza nula.

3.4 Teoría del potencial

Después de haber revisado las formulaciones más habituales para la construcción de densidades superficiales de magnitudes físicas a partir de los campos de vacío, uno se pregunta si es posible extender fórmulas de la teoría del potencial en espacio plano a la relatividad general.

En particular sería interesante obtener una descripción del momento dipolar magnético al estilo de la que se hace en el apéndice A para el caso clásico, ya que ninguno de los formalismos anteriores permite hacerlo.

Por ello en esta sección nos concentraremos en la generalización de las fórmulas clásicas de teoría del potencial [36] que relacionan las discontinuidades de un potencial escalar con las hojas de dipolos que generan el campo en el vacío. Se obtendrán expresiones para el momento angular, el momento dipolar magnético y el momento de masa y se utilizarán estos resultados para aplicarlos a varias soluciones exactas, entre ellas la de Kerr.

3.4.1 Momento angular

Comenzaremos la construcción con el momento angular, tomando como punto de partida el formalismo libre de deformación para el campo de vacío, que se presentó como simplificación del formalismo general en la sección 2.8. Para esta sección seguiremos como referencia el artículo [20].

Nos restringiremos desde el principio al campo de validez del formalismo de Israel, es decir, a soluciones de vacío estacionario axisimétrico. También se pueden incluir soluciones de vacío electromagnético en las que el campo eléctrico sea paralelo al campo magnético (se trata de evitar términos de fuente en la ecuación dinámica para la vorticidad (2.59)).

Dado que estamos interesados en campos generados por fuentes compactas, nos circunscribiremos a métricas que sean asintóticamente planas. Para nuestros fines, bastará que se comporten como la métrica aproximada de Lense-Thirring [37] en un sistema de coordenadas adecuado (t, r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(dt + \frac{2J \sin^2 \theta}{r} d\phi\right)^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] + O(1/r^2) \quad (3.30)$$

siendo m la masa total de la fuente y J el momento angular total.

Proseguimos el enfoque dado en el apéndice A y buscamos dos expresiones alternativas para la vorticidad ω de la congruencia definida por la velocidad u . Las encontramos a partir de las ecuaciones (2.56) y (2.59):

$$dw + (b - 2a) \wedge w = 0 \quad (3.31)$$

$$d * w + 2a \wedge * w = 0 \quad (3.32)$$

La integración formal de estas ecuaciones nos conduce a las expresiones que buscábamos:

$$\omega = - * w = -\rho^{-1} e^{2U} * dA = -e^{-2U} d\chi \quad (3.33)$$

en función del potencial de twist χ y la función métrica A , ya introducidas en la sección 2.8. Estas dos funciones harán el papel, respectivamente, del potencial escalar y de la proyección axial del potencial vector en la teoría del potencial clásica.

Las condiciones anteriormente expresadas para la métrica se traducen en la siguiente forma asintótica para las funciones métricas (2.73) y el potencial de twist:

$$e^{2U} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + O(r^{-2}) \quad (3.34)$$

$$A = -\frac{2J \sin^2 \theta}{r} + O(r^{-2}) \quad (3.35)$$

$$e^{2\gamma} = 1 + O(r^{-2}) \quad (3.36)$$

$$\chi = -\frac{2J \cos \theta}{r^2} + O(r^{-3}) \quad (3.37)$$

Al igual que en el formalismo de Israel, en este tratamiento haremos uso de integrales sobre las hojas $t = \text{const.}$. Trabajaremos por tanto en el espacio (V_3, g) cuya métrica vendrá dada por:

$$ds^2 = -e^{2U} A^2 d\phi^2 + e^{-2U} \{e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2\} \quad (3.38)$$

Introduciremos de antemano una función Z_{rot} que satisfaga la siguiente ecuación elíptica:

$$\partial_\mu \left(\sqrt{g} \frac{e^{-3U} g^{\mu\nu} \partial_\nu Z_{rot}}{(1 - e^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}} \right) = 0 \quad (3.39)$$

con la condición de contorno de que se comporte en el infinito como una coordenada Z_{rot} cartesiana, $Z_{rot} = r \cos \theta$ a grandes distancias.

Sobre el espacio V_3 integraremos la proyección de la diferencia de ambas expresiones para la vorticidad sobre el gradiente de la función Z_{rot} :

$$0 = \int_{V_3} \sqrt{g} \frac{e^{-U}}{(1 - e^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}} \langle \omega - \omega, dZ_{rot} \rangle dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.40)$$

donde \langle , \rangle representa el producto escalar asociado a la métrica g .

El integrando de la expresión anterior se puede expandir de la siguiente manera, teniendo en cuenta que Z_{rot} satisface la ecuación (3.39), de modo que resulta ser una derivada total:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{g}}{(1 - e^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}} \partial_\nu Z_{rot} \{ \rho^{-1} e^U \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A - e^{-3U} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \} = \\
& = \partial_\mu ([\mu\nu] A \partial_\nu Z_{rot} - \sqrt{g} \frac{e^{-3U} g^{\mu\nu} \chi \partial_\nu Z_{rot}}{(1 - e^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}}) \quad (3.41)
\end{aligned}$$

siendo $\varepsilon^{\mu\nu} = e^{2(U-\gamma)}[\mu\nu]$ el tensor de Levi-Civita en el espacio ortogonal a las orbitas de los vectores de Killing.

Ahora supondremos que la métrica es continua y que el potencial de twist es discontinuo a través de una superficie cerrada S . Como ya mencionamos al hablar del formalismo de Israel, esto no supone ninguna restricción, ya que siempre podemos completar la superficie tomando el valor cero para el salto del potencial en la parte añadida. El espacio V_3 queda dividido en dos regiones V_3^- (interior) y V_3^+ (exterior) sobre las cuales podemos aplicar el teorema de Stokes a la integral 3.40:

$$0 = \int_{\partial V_3^+ \cup \partial V_3^-} \frac{n_\mu \partial_\nu Z_{rot} \{ \rho^{-1} e^U \varepsilon^{\mu\nu} A - e^{-3U} g^{\mu\nu} \chi \}}{(1 - e^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}} dS \quad (3.42)$$

La frontera de V_3^+ está formada por S y la esfera en el infinito mientras que la frontera de V_3^- es S . Después de calcular la integral en el infinito con la ayuda de las condiciones asintóticas, la igualdad anterior toma la siguiente forma:

$$\int_S dS [\chi] \frac{e^{-3U}}{(1 - e^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}} g^{\mu\nu} n_\mu \partial_\nu Z_{rot} = -8\pi J \quad (3.43)$$

denotando por $[\chi]$ el salto del potencial de twist a través de S y por n la normal exterior unitaria a S . Así podemos interpretar el integrando como densidad de momento angular de una fuente bidimensional formada por una hoja de dipolos de rotación:

$$\sigma_J = -\frac{1}{8\pi} [\chi] \frac{e^{-3U}}{(1 - e^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}} g^{\mu\nu} n_\mu \partial_\nu Z_{rot} \quad (3.44)$$

Este es el tipo de fórmula que cabría esperar en una generalización a espacios curvos de la teoría del potencial, con dependencia en el salto del

potencial y en la proyección de la normal de la superficie sobre una dirección Z_{rot} , al estilo del resultado reseñado en el apéndice A para el dipolo magnético.

Es de destacar que, a diferencia de la teoría clásica, la coordenada Z_{rot} relevante para el cálculo no es independiente de la geometría, sino que está determinada por esta y, por tanto, por el contenido energético del espacio-tiempo, hecho este que complica los cálculos de las densidades de magnitudes dipolares.

Como ejemplo de aplicación de este tratamiento, al final de este capítulo se construirá la densidad de momento angular de la solución estacionaria de vacío de Kerr y se comparará con los resultados obtenidos usando otros formalismos, pero antes dedicaremos unos apartados más al cálculo de densidades superficiales de otras cantidades físicas dipolares.

3.4.2 Momento dipolar magnético

Dado que el formalismo de Israel no permite la construcción de densidades de momento dipolar magnético (la integral correspondiente se anula en vez de suministrar el valor del momento), parece conveniente intentar una generalización de la fórmula (A.8) de forma similar a como se calculó la densidad de momento angular en el apartado anterior. Para ello nos guiaremos por un resultado reciente incluido en [21].

El objetivo de este apartado será, pues, la construcción de fuentes en la forma de hojas de dipolos para el campo magnético en configuraciones magnetostáticas con simetría axial. En realidad imponer estaticidad es un requerimiento demasiado fuerte, ya que basta con que el campo eléctrico sea paralelo al dual de la vorticidad ($E \wedge w = 0$) de modo que no haya acoplos entre el campo electromagnético y el dual de la vorticidad en la ecuación (2.25) para la divergencia de B .

En estas condiciones, podemos integrar fácilmente las ecuaciones (2.25), (2.27) para el campo magnético, obteniendo dos expresiones para el mismo campo:

$$B = -e^{-U} dV = -\rho^{-1} e^U * dW \quad (3.45)$$

donde V , el potencial escalar magnético, es la parte imaginaria del potencial Φ definido en la ecuación (2.64) y W es el equivalente de la componente axial del potencial vector.

Recordemos que el potencial escalar sólo puede definirse fuera de las fuentes y que sufre un salto cuando se atraviesa una fuente laminar. Por ello sus discontinuidades son reveladoras de la presencia de las fuentes.

El interés del cálculo se centra en configuraciones que puedan corresponder a fuentes compactas, con lo cual nos seguimos restringiendo a soluciones asintóticamente planas. Aparte de las condiciones (3.34) - (3.37) que vienen impuestas sobre la métrica, habrá que definir también el comportamiento asintótico del campo magnético. Excluyendo campos magnéticos monopulares, el primer orden que aparece es el dipolar, con lo cual la forma de los potenciales en el infinito estará regida por las siguientes expresiones en función del momento dipolar magnético total de la fuente, M :

$$V = \frac{M \cos \theta}{r^2} + O(r^{-3}) \quad (3.46)$$

$$W = \frac{M \sin^2 \theta}{r} + O(r^{-2}) \quad (3.47)$$

Igual que en el apartado anterior, introduciremos una función Z_{mag} que se comporte como la coordenada z cuando el radio r es grande y que satisfaga una ecuación elíptica, distinta de la del caso rotacional:

$$\partial_\mu (\sqrt{g} e^{-U} g^{\mu\nu} \partial_\nu Z_{mag}) = 0 \quad (3.48)$$

Del mismo modo integraremos a todo el espacio V_3 , una hipersuperficie de tiempo constante, la diferencia entre las expresiones para el campo magnético en función de ambos potenciales, proyectada sobre la diferencial de la función Z_{mag} :

$$0 = \int_{V_3} \sqrt{g} \langle [B - B], dZ_{mag} \rangle dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.49)$$

Una vez más podemos escribir el integrando como una derivada total y reducir el orden de la integral usando el teorema de Stokes. Teniendo en cuenta que la integral debe dividirse en dos partes debido a que el potencial escalar magnético V es discontinuo a través de una superficie S y que la integral en el infinito puede calcularse con los datos que tenemos sobre la métrica y el campo magnético, el resultado que se obtiene es:

$$\int_S dS [V] e^{-U} g^{\mu\nu} n_\mu \partial_\nu Z_{mag} = 4 \pi M \quad (3.50)$$

de donde podemos inferir la expresión de la densidad de momentos dipolares magnéticos sobre la superficie S como función de la discontinuidad del potencial escalar, $[V]$, y la proyección de la normal unitaria a S sobre el gradiente de Z_{mag} :

$$\sigma_M = \frac{1}{4\pi} [V] e^{-U} \partial_\mu Z_{mag} n^\mu \quad (3.51)$$

Esta fórmula tan sólo difiere de su equivalente clásica (A.8) en el factor métrico e^{-U} y en la dependencia de Z_{mag} en la variedad espaciotemporal.

Es curioso que el factor métrico sea distinto para el momento angular que el momento magnético y que las coordenadas Z satisfagan diferentes ecuaciones diferenciales.

Un tratamiento similar puede realizarse para el momento dipolar eléctrico en ausencia de cargas eléctricas.

3.4.3 Transformación de Bonnor

Una de las peculiaridades de este formalismo de construcción de densidades dipolares superficiales es su comportamiento bajo transformaciones de Bonnor. Estas transformaciones son uno de los métodos algebraicos para la generación de soluciones de vacío magnetostático a partir de soluciones estacionarias, no estáticas, de vacío sin campo electromagnético, ambas con simetría axial.

Puesto que las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con un grupo bidimensional de isometrías están caracterizadas completamente por sus dos potenciales de Ernst, bastará como revisión escribir las reglas que determinan los potenciales, ε y Φ , para la solución de las ecuaciones de Ernst (2.69), (2.70) a partir del potencial de vacío, ε_{vac} :

$$\varepsilon = \varepsilon_{vac} \bar{\varepsilon}_{vac} \quad (3.52)$$

$$\Phi = iV \quad V = i\chi_{vac} \quad (3.53)$$

$$e^{2U} = e_{vac}^{4U} \quad (3.54)$$

Dado que la solución que se genera de esta forma es compleja -el potencial escalar magnético V es imaginario puro, ya que el potencial de twist de vacío no electromagnético, χ_{vac} , es real-, los parámetros de la solución deben

modificarse con una rotación en el plano complejo para dotar de sentido físico a la nueva solución.

Consideremos ahora la función Z_{mag} para la solución generada. Dado que se trata de una función exclusivamente de las coordenadas de Weyl, ρ y z , las únicas componentes de la métrica tridimensional g sobre V_3 que aparecen en la ecuación (3.48) son:

$$g^{\rho\rho} = g^{zz} = e^{2U-2\gamma} \quad (3.55)$$

Por su parte, la raíz cuadrada del determinante de la métrica compensará los términos en la función γ , que será distinta en ambas soluciones:

$$\sqrt{g} = e^{-3U+2\gamma} \rho \quad (3.56)$$

Con lo cual la ecuación (3.48), escrita como función de la métrica original, adopta la siguiente forma tras el necesario reajuste de los parámetros:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu (\sqrt{g} e^{-U} g^{\mu\nu} \partial_\nu Z_{mag}) = \\ &= \partial_\mu (e^{-2U} \rho \delta_{\mu\nu} \partial_\nu Z_{mag}) = \\ &= \partial_\mu (e_{vac}^{-4U} \rho \delta_{\mu\nu} \partial_\nu Z_{mag}) = \\ &= \partial_\mu (\sqrt{g_{vac}} \left(\frac{e_{vac}^{-3U}}{(1 - e_{vac}^{4U} A^2 \rho^{-2})^{1/2}} \right) g_{vac}^{\mu\nu} \partial_\nu Z_{mag}) = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

De esta expresión se deduce que la función Z_{mag} que se precisa para construir densidades superficiales de momento dipolar magnético satisface la misma ecuación diferencial que la función Z_{rot} utilizada en el cálculo de la densidad de momento angular para la métrica primitiva de vacío, g_{vac} .

En consecuencia, la misma función es válida para ambas soluciones, después de reinterpretar los parámetros involucrados, y el tratamiento es compatible con la transformación de Bonnor.

3.4.4 Momento de masa

Finalmente, como complemento al tratamiento de magnitudes dipolares, incluimos el momento dipolar de masa, a pesar de que su interés físico es mucho más limitado, ya que trabajando con sistemas de coordenadas con origen en el centro de masas este momento se anula, salvo que consideremos masas negativas. En cualquier caso, independientemente de su carácter físico, es

interesante conocer cuando una solución incorpora entre sus fuentes de campo gravitatorio hojas de dipolos de masa.

En este apartado nos circunscribiremos a soluciones estáticas de vacío, axisimétricas y que sean asintóticamente dipolares, entendiendo por ello que la función métrica U pueda escribirse en coordenadas adecuadas como:

$$U = \frac{D \cos \theta}{r^2} + O(r^{-3}) \quad (3.58)$$

siendo D el momento de masa total.

El procedimiento a seguir [38] es similar al que se ha venido desarrollando en los apartados previos, con el detalle técnico de que la presencia del momento se refleja en discontinuidades en la función métrica U , hecho este que provoca varios tipos de problemas: Por un lado la propia métrica deja de ser continua y por otro, la aparición de factores dependientes de U en las expresiones provocará que estas, en principio, no sean tan manejables como las del momento angular o el momento magnético.

Las ecuaciones para la aceleración (2.55) (2.60) se pueden integrar formalmente, introduciendo una nueva función que denotaremos por Λ :

$$a = dU = -\rho^{-1} * d\Lambda \quad (3.59)$$

El comportamiento asintótico de U impone una condición en el infinito sobre esta función Λ :

$$\Lambda = -\frac{D \sin^2 \theta}{r} + O(r^{-2}) \quad (3.60)$$

Como ya se había anunciado, supondremos que la función U es discontinua a través de una superficie S , de modo que podamos tener una fuente dipolar para el campo gravitacional.

A diferencia de los casos detallados anteriormente, no introduciremos ninguna función que coincida con la coordenada cartesiana para grandes distancias de la fuente. Solamente recordar que la coordenada z de Weyl satisface la ecuación (es solución del D'Alembertiano ya que $\sqrt{-^4g} = e^U \sqrt{g}$):

$$\partial_\mu \{ \sqrt{g} e^U g^{\mu\nu} \partial_\nu z \} = 0 \quad (3.61)$$

La integral que calcularemos para construir la densidad de momento de masa será:

$$0 = \int_{V_3} \sqrt{g} e^U \langle [a - a], dz \rangle dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.62)$$

que, por la ecuación que satisface la coordenada de Weyl, se puede reducir a una integral de superficie, al tener por integrando una derivada total.

$$0 = \int_{V_3} \partial_\mu \{ \sqrt{g} U e^U g^{\mu\nu} \partial_\nu z + [\mu\nu] \Lambda \partial_\nu z \} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (3.63)$$

Después de dividir la integral en dos partes para dar cuenta de las discontinuidades presentes sobre la superficie S y sustituir el valor de la integral sobre la frontera del dominio en el infinito, llegamos al siguiente resultado:

$$4\pi D = \int_{S^+} dS^+ \{ U e^U n^\mu \partial_\mu z \}^+ - \int_{S^-} dS^- \{ U e^U n^\mu \partial_\mu z \}^- \quad (3.64)$$

donde S^+ y S^- simbolizan, respectivamente, la cara externa e interna de la superficie de normal unitaria exterior n .

Dado que la métrica es discontinua, no se puede en principio expresar este resultado en función del salto del potencial U . Pero en algunos casos [38], como en el ejemplo que estudiaremos al final del capítulo, los términos en U se pueden factorizar, dando sentido a una expresión para el elemento diferencial de dipolo de masa.

3.5 Estudio de algunos ejemplos

3.5.1 Métrica de Kerr

La métrica de Kerr [2] fue la primera solución de vacío no estática y asintóticamente plana con tan sólo dos Killing que se obtuvo e, independientemente de su posible interpretación como el campo exterior de una masa de fluido rotante, su interés fundamental en astrofísica radica en el hecho de que describe la geometría del espaciotiempo en torno a un agujero negro en rotación estacionaria. Se trata, por tanto, de un buen candidato para aplicar el formalismo descrito previamente para la construcción de densidades superficiales de momento angular.

En coordenadas de Boyer-Linquist el elemento de línea tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= -\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \left(dt + \frac{2mar \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta} d\phi\right)^2 + \\
&+ \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)^{-1} \{(r^2 - 2mr + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \\
&+ (r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2\right)\} \quad (3.65)
\end{aligned}$$

donde m es la masa total de la fuente y ma su momento angular.

Esta métrica adolece de un problema [19] en el disco que queda englobado dentro del anillo singular ($r = 0, \theta = \pi/2$), ya que su derivada normal es discontinua sobre esta superficie, salvo que prolonguemos el rango de validez de las coordenadas hacia radios negativos, donde nos encontraríamos con curvas temporales cerradas [40]. Por ello, nos limitaremos a regiones cuyo radio coordenado sea no negativo y asumiremos la discontinuidad como sintomática de la existencia de una fuente extensa.

Para visualizar la estructura de disco de la región $r = 0$ es conveniente introducir coordenadas pseudocilíndricas:

$$P = (r^2 + a^2)^{1/2} \sin \theta \quad (3.66)$$

$$Z = r \cos \theta \quad (3.67)$$

En estas coordenadas queda manifiesto que la superficie $r = 0$ es un disco de radio $P = a \sin \theta$ en el plano $Z = 0$ y dotado de una métrica plana:

$$ds^2 = a^2 (\cos^2 \theta d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.68)$$

y normal unitaria en la variedad espaciotemporal:

$$n = \frac{1}{\cos \theta} \partial_r \quad (3.69)$$

Dado que los puntos con ángulo polar θ y $\pi - \theta$ son coincidentes sobre el disco, limitaremos el dominio de la coordenada θ a $[0, \pi/2)$ sobre esta superficie para evitar contarlos dos veces.

En 1970, Israel [19] aplicó su formulación basada en la teoría de capas finas en relatividad general para obtener el tensor de energía-momento, S , de una fuente mínima consistente en el disco plano $r = 0$ limitado por el anillo singular:

$$S = \sigma (u \otimes u + \xi \otimes \xi) \quad \sigma = -\frac{m}{4 \pi a^2 \cos \theta} \quad (3.70)$$

donde u es ortonormal a ξ y este es el vector unitario radial sobre el disco:

$$\xi = \frac{1}{a \cos \theta} \partial_\theta \quad (3.71)$$

$$u = \tan \theta \partial_t + \frac{1}{a \sin \theta \cos \theta} \partial_\phi \quad (3.72)$$

Los resultados que se obtienen aplicando las fórmulas de de la Cruz e Israel (3.11), (3.12) para la densidad de masa y de momento angular son los siguientes [19]:

$$\sigma_m = -\frac{m}{2 \pi a^2 \cos^3 \theta} \quad (3.73)$$

$$\sigma_J = -\frac{m \sin^2 \theta}{4 \pi a^2 \cos^3 \theta} \quad (3.74)$$

que resultan ser no integrables sobre el disco $r = 0$ al acercarnos al anillo singular.

El mismo resultado divergente se obtiene utilizando las integrales de Komar (3.27) sobre el propio disco, teniendo en cuenta que el límite de una superficie cerrada que englobe la fuente estará formada por ambas caras del disco.

Los cálculos fueron repetidos por López [33] usando la teoría de distribuciones incluyendo el anillo singular, cuya masa y momento angular divergentes regularizan las integrales.

Veamos ahora el resultado que se obtiene usando la extensión de la teoría del potencial tratada en esta memoria [20]:

En primer lugar recordemos la expresión para el potencial de Ernst para la solución de Kerr:

$$\varepsilon = 1 - \frac{2m}{r - ia \cos \theta} \quad (3.75)$$

cuya parte imaginaria es el potencial de twist:

$$\chi = -\frac{2ma \cos \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.76)$$

Dada la identificación de puntos que hemos realizado sobre el disco $r = 0$, este potencial es bivaluado sobre esta superficie:

$$\chi|_{r=0} = -\epsilon \frac{2m}{a \cos \theta} \quad \theta \in [0, \pi/2) \quad (3.77)$$

El valor de la constante ϵ es uno (menos uno) si nos acercamos al disco provenientes del semiespacio superior, $\theta < \pi/2$ (inferior $\theta > \pi/2$), lo cual pone de manifiesto que el potencial de twist es discontinuo, indicando la existencia de una hoja de dipolos de momento angular sobre el disco:

$$[\chi]_{r=0} = -\frac{4m}{a \cos \theta} \quad (3.78)$$

Obviamente, la solución de Kerr satisface los requerimientos de planitud asintótica, con lo cual, para calcular la densidad de dipolos sobre el disco sólo hará falta resolver la ecuación (3.39) con su condición de contorno para obtener la función Z_{rot} . En esta geometría, la ecuación adopta la forma:

$$\partial_r(e^{-4U} \sin \theta \Delta \partial_r Z_{rot}) + \partial_\theta(e^{-4U} \sin \theta \partial_\theta Z_{rot}) = 0 \quad (3.79)$$

$$e^{-4U} = \left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta} \right)^2 \quad (3.80)$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 \quad (3.81)$$

La solución hallada para esta ecuación es la siguiente:

$$Z_{rot} = (r - 3m) \cos \theta + \frac{2a^2 m \cos^3 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.82)$$

Nótese que, dado que la condición de contorno en el infinito no agota la libertad de elección de soluciones consistentes con ella (se le puede añadir cualquier solución que se anule en el infinito), hemos preferido imponer que la función Z_{rot} sea regular y, por ello, esta solución difiere de la presentada en [20]:

En un apéndice se detallarán las propiedades de esta función. En esta sección nos limitaremos a utilizarla para obtener una expresión para la densidad de momento angular sobre el disco $r = 0$. Tras la sustitución de los elementos pertinentes en la ecuación (3.44) obtenemos:

$$\sigma_J = \frac{m}{2\pi a \cos \theta} \quad (3.83)$$

$$J = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta a^2 \sin \theta \cos \theta \sigma_J = m a \quad (3.84)$$

Como vemos la densidad obtenida es perfectamente integrable, a diferencia de la obtenida con los tratamientos de Israel y de Komar y conduce al valor correcto con la expansión de la métrica en el campo lejano. Se trata por tanto de una versión regularizada de la densidad obtenida por los otros formalismos.

Lejos de ser extraña esta situación, se trata de un hecho normal en la teoría del potencial aplicada a la magnetostática: Pensemos por un momento en el campo magnético creado por un anillo de corriente uniforme. Si se analiza el potencial escalar para dicha configuración, se observa que es equivalente al producido por una hoja de momentos magnéticos distribuidos uniformemente por el área encerrada por el anillo.

Por otra parte, el potencial de Ernst para la métrica de Kerr es una solución de la ecuación de Laplace en espacio plano, escrita en coordenadas esferoidales achatadas. Por tanto, su parte imaginaria puede ser considerada como un potencial newtoniano y se puede calcular su densidad dipolar utilizando la teoría del potencial clásica. Las expresiones que se obtienen son coincidentes con las ya reseñadas para J y σ_J de la métrica de Kerr (3.83). Además si consideramos, en espacio plano, el potencial clásico generado por σ_J como fuente dipolar, resulta que coincide con el potencial de twist de la solución de Kerr. Es decir, el potencial de twist está generado, como solución de la ecuación de Laplace en espacio plano, por una hoja de dipolos, sin necesidad de recurrir a fuentes de más alta multipolaridad.

3.5.2 Dipolo magnético de Bonnor

Como ejemplo de cálculo de una densidad de momento magnético para una solución exacta [21], construiremos la fuente dipolar para el dipolo masivo de Bonnor [41]. Se trata de una transformada de Bonnor de la solución de Kerr, por lo que podemos emplear la función Z obtenida en el apartado precedente, de acuerdo con la invariancia de estas funciones bajo este tipo de transformaciones.

Aplicando la transformación sobre la solución de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist se obtiene la siguiente métrica:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2mr}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right)^{-2} \times \\
&\times \left\{ (r^2 - a^2 - 2mr) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{(r^2 - a^2 \cos^2 \theta - 2mr)^4}{[(r-m)^2 - (a^2 + m^2) \cos^2 \theta]^3} \right. \\
&\times \left. \left(d\theta^2 + \frac{dr^2}{r^2 - 2mr - a^2} \right) \right\} \quad (3.85)
\end{aligned}$$

de la cual podemos extraer la función métrica e^{2U} :

$$e^{2U} = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \right)^2 = 1 - \frac{4m}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad (3.86)$$

después de sustituir $a_{Kerr} = ia$.

El campo magnético viene determinado por el siguiente potencial escalar:

$$V = \frac{2am \cos \theta}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} = \frac{2am \cos \theta}{r^2} + 0 \left(\frac{1}{r^4} \right) \quad (3.87)$$

De donde se deduce que tanto la métrica como el potencial escalar satisfacen las condiciones asintóticas para una masa $2m$ y un momento magnético $2am$.

Si consideramos que la métrica está escrita en unas coordenadas tipo esferoidales achatadas al estilo de Kerr, entonces los sucesos en la superficie $r = 0$ con coordenada θ tendrán que identificarse con los que tienen ángulo polar $\pi/2 - \theta$ y dicha coordenada θ variará de 0 a $\pi/2$ sobre la superficie.

En consecuencia la función $\cos \theta$ sufre un salto al cruzar $r = 0$, ya que cambia su signo de positivo en el semiespacio superior ($0 \leq \theta < \pi/2$) a negativo en el semiespacio inferior ($\pi/2 \leq \theta < \pi$).

Por tanto, el potencial escalar es discontinuo en la superficie $r = 0$ y la diferencia entre los valores que toma en la cara superior y la inferior es:

$$[V] = -\frac{4m}{a \cos \theta} \quad (3.88)$$

La función Z_{mag} que satisface la ecuación (3.48) se obtiene simplemente sustituyendo $a_{Kerr} = ia$ en la expresión para Z_{rot} de la solución de Kerr (3.82), tal como se mostró en el apartado 3.4.3.

$$Z_{mag} = (r - 3m) \cos \theta - \frac{2a^2 m \cos^3 \theta}{r^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.89)$$

El elemento de superficie para $r = 0$ es:

$$dS = \frac{a^5 \sin \theta \cos^4 \theta}{|a^2 \cos^2 \theta - m^2 \sin^2 \theta|^{3/2}} d\theta d\phi \quad (3.90)$$

Con lo cual tenemos todos los datos par escribir la densidad superficial de momento magnético para la fuente de la solución dipolar de Bonnor, usando la formula 3.51:

$$\sigma = \frac{m}{\pi a^4} \frac{|a^2 \cos^2 \theta - m^2 \sin^2 \theta|^{3/2}}{\cos^4 \theta} \quad (3.91)$$

La integral que define el momento total es convergente y da el resultado esperado:

$$M = \int_S \sigma dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta (m a \sin \theta) = 2 m a \quad (3.92)$$

Pero desafortunadamente la fuente se ubica en una región donde la signatura de la métrica no es la usual (por ejemplo, el ángulo acimutal ϕ no es una coordenada espacial, lo que provocaría la existencia de curvas temporales cerradas), por lo cual su interpretación como fuente material realizable físicamente es un tanto dudosa.

3.5.3 Solución dipolar de Zipoy

Como cierre de esta sección dedicada a las aplicaciones prácticas del formalismo de construcción de densidades superficiales de magnitudes físicas dipolares, incluimos el cálculo de la densidad de momento de masa de la fuente mínima de la solución dipolar de Zipoy [42].

Las métricas de Zipoy constituyen una clase de soluciones estáticas de vacío con simetría axial y, por tanto, están incluidas en la solución general de Weyl [1].

Dado que la vorticidad y el campo electromagnético se anulan, la única ecuación que hay que resolver, si imponemos las coordenadas de Weyl, es (2.60). Sabiendo que la aceleración es $a = dU$ esta ecuación se puede escribir como:

$$d * dU + \rho^{-1} d\rho \wedge *dU = 0 \quad (3.93)$$

Es decir, las soluciones estáticas axisimétricas de vacío se obtienen a partir de soluciones de la ecuación de Laplace tridimensional reducida:

$$U_{\rho\rho} + U_{zz} + \frac{1}{\rho} U_{\rho} = 0 \quad (3.94)$$

La aparente analogía entre el caso relativista y el caso clásico es engañosa, ya que, por ejemplo, la métrica de Schwarzschild, correspondiente a un monopolo de masa, no proviene de la solución monopolar de la anterior ecuación (que conduce a la métrica de Curzon). En cambio la solución clásica para el potencial gravitatorio de una varilla finita homogénea nos proporciona la función U adecuada para construir la métrica de Schwarzschild.

Las métricas de Zipoy se corresponden con esta subfamilia de la clase de Weyl construida a partir de soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales achatadas $\{r, \theta\}$ en vez de en coordenadas pseudocilíndricas $\{\rho, z\}$:

$$(r^2 + a^2) U_{rr} + 2r U_r + U_{\theta\theta} + \cot \theta U_{\theta} = 0 \quad (3.95)$$

$$z = r \cos \theta \quad (3.96)$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \quad (3.97)$$

donde a es una constante y las coordenadas varían entre los límites habituales:

$$0 \leq r < \infty \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.98)$$

Una vez más los sucesos definidos por las coordenadas $(t, \phi, r = 0, \theta)$ y $(t, \phi, r = 0, \pi - \theta)$ tienen las mismas coordenadas de Weyl. Por tanto, los identificaremos, en vez de intentar interpretaciones más sofisticadas.

La notación que estamos utilizando es la empleada en [38] en lugar de usar el ángulo de latitud y la coordenada u , relacionada con el radio r por la expresión $r = a \sinh u$, que suelen emplearse como coordenadas esferoidales achatadas en la bibliografía. De este modo ganamos en interpretación, ya que estas coordenadas r, θ son asintóticamente esféricas.

Las soluciones de la ecuación de Laplace en estas coordenadas se pueden escribir en la forma:

$$U_n = f_n(r) p_n(\cos \theta) \quad (3.99)$$

where p_n denota el enésimo polinomio de Legendre.

El índice n varía de cero a infinito, pero en este apartado nos interesaremos por la solución con $n = 1$, que nos permite obtener la función U para la métrica dipolar de Zipoy:

$$U = c \left\{ 1 - \frac{r}{a} \arctan\left(\frac{a}{r}\right) \right\} \cos \theta \quad (3.100)$$

donde c es una constante.

Para grandes valores de la coordenada r esta función se comporta como un potencial dipolar de momento $D = \frac{1}{3} c a^2$:

$$U = \frac{1}{3} c a^2 \frac{\cos \theta}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (3.101)$$

La restante función métrica, γ , aunque no la necesitemos es:

$$e^{2\gamma} = \left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} \right)^{-c^2} \exp\{-U^2 \tan^2 \theta - c^2 \sin^2 \theta [\arctan(\frac{a}{r})]^2\} \quad (3.102)$$

Debido a la identificación de sucesos realizada sobre el disco $z = 0$, $\rho \leq a$ ($r = 0$, $\theta \leq \frac{\pi}{2}$), la función U sufre una discontinuidad:

$$[U] = 2c \cos \theta = 2c \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} \quad (3.103)$$

Pero el disco $r = 0$ tiene por elemento de superficie y normal unitaria:

$$dS = \rho e^{\gamma-2U} d\rho d\phi \quad (3.104)$$

$$n = e^{U-\gamma} \partial_z \quad (3.105)$$

Por tanto, el producto $e^U n^\mu \partial_\mu z dS$, que aparece en la expresión (3.64) para la densidad de momento de masa, no depende de U , toma el mismo valor a ambos lados del disco y la integral que define el momento dipolar de masa se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{4\pi} \int_S dS [U] e^U n^\mu \partial_\mu z \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \rho 2c \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} = \frac{1}{3} c a^2
\end{aligned} \tag{3.106}$$

El momento de masa total toma el valor esperado de la forma asintótica de la métrica y el elemento diferencial de dipolo se puede escribir como:

$$dD = \frac{1}{2\pi} \rho c \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}} d\phi d\rho \tag{3.107}$$

Este resultado coincide con el que se obtiene en [44], aunque en esa referencia sólo se hace una interpretación basada en el símil newtoniano, sin hacer una justificación relativista.

Capítulo 4

Soluciones exactas

4.1 Introducción

En el capítulo anterior se utilizó la simplificación del sistema de ecuaciones consistente en presentar la 1-forma u como libre de deformación para obtener información sobre las fuentes mínimas de los campos de las soluciones exactas de vacío.

En este capítulo se hará uso de otras dos simplificaciones para extender familias ya conocidas de soluciones de exactas estacionarias axisimétricas y construir una nueva.

Estas dos simplificaciones que se van a tratar son de muy diferente índole: Una de ellas consistirá en escribir el sistema exterior referido a una tétrada cuya componente temporal sea irrotacional. Se trata, por tanto, de una simplificación simétrica de la realizada anteriormente (anulamos w en vez de s) y permitirá escribir las ecuaciones de una forma muy parecida, lo cual capacitará para extender resultados anteriores basados en ansätze habituales.

La segunda simplificación consistirá en realizar una transformación de Lorentz local de modo que se diagonalize el tensor energía-momento. Esto permitirá mostrar la equivalencia que existe entre los diferentes casos de campos electromagnéticos con un sólo invariante Lorentz nulo. Como muestra de cómo este sistema de referencia alternativo puede ser utilizado, se construirá una familia nueva de soluciones exactas a partir de soluciones de la ecuación de Tricomi.

4.2 Formalismo irrotacional

4.2.1 Ecuaciones de Ernst

Como ya hemos anunciado, en esta sección escribiremos el sistema exterior de ecuaciones en un referencial en el que la vorticidad w sea cero. Esto es perfectamente compatible con las ecuaciones, como ocurría para campos de vacío no electromagnético [16], [17]. Por supuesto, no es posible en general para un fluido perfecto, pues para este la vorticidad y la deformación están definidas sin libertad gauge.

Las ecuaciones que determinan el boost, de parámetro λ , son ahora:

$$u' = \cosh \lambda u + \sinh \lambda \theta^1 \quad (4.1)$$

$$\theta^{1'} = \sinh \lambda u + \cosh \lambda \theta^1 \quad (4.2)$$

$$E = \cosh \lambda E' - \sinh \lambda * B' \quad (4.3)$$

$$B = \cosh \lambda B' + \sinh \lambda * E' \quad (4.4)$$

$$d\lambda = \cosh \lambda \sinh \lambda (2a' - b') + \cosh^2 \lambda w' - \sinh^2 \lambda s' \quad (4.5)$$

Y después de esta simplificación, el sistema exterior (2.40)-(2.48) a resolver se reduce a:

$$db = 0 \quad (4.6)$$

$$da = 0 \quad (4.7)$$

$$ds = (b - 2a) \wedge s \quad (4.8)$$

$$d * f = (a - b) \wedge * f \quad (4.9)$$

$$df = -a \wedge f - is \wedge * f \quad (4.10)$$

$$d * s + 2(b - a) \wedge *s = -2if \wedge \bar{f} \quad (4.11)$$

$$d * a + b \wedge *a - \frac{1}{2}s \wedge *s = \bar{f} \wedge *f \quad (4.12)$$

$$d * b + b \wedge *b = 0 \quad (4.13)$$

Las ecuaciones (4.6)-(4.9) se pueden integrar con la introducción de nuevas funciones:

$$a = dU \quad (4.14)$$

$$b = d \ln \rho \quad (4.15)$$

$$*b = -\rho^{-1} dz \quad (4.16)$$

$$s = \rho e^{-2U} dC \quad (4.17)$$

$$*f = -e^U \rho^{-1} d\Psi \quad (4.18)$$

De la ecuación 4.11 obtenemos una diferencial exacta que define el potencial de deformación ψ , en analogía con el potencial de twist:

$$d\psi = \rho^2 e^{-2U} *s - 2i \bar{\Psi} d\Psi \quad (4.19)$$

y construir otro potencial complejo η similar al potencial de Ernst:

$$d\eta = d(-\rho^2 e^{-2U}) - i d\psi \quad (4.20)$$

$$\mathcal{R}\{\eta\} = -\rho^2 e^{-2U} - \bar{\Psi} \Psi \quad (4.21)$$

Si sustituimos 4.18 in 4.10, obtenemos una ecuación del tipo de la Ernst para el potencial Ψ :

$$d * d\Psi + b \wedge *d\Psi = \frac{1}{\mathcal{R}\eta + \Phi\bar{\Phi}} \{d\eta + 2\bar{\Psi}d\Psi\} \wedge *d\Psi \quad (4.22)$$

La ecuación elíptica para el potencial η se obtiene combinando la ecuación anterior con las condiciones de integrabilidad para (4.14) y (4.12) y para (4.8) y (4.19):

$$d * d\eta + b \wedge * d\eta = \frac{1}{\mathcal{R}\eta + \Psi\bar{\Psi}} \{d\eta + 2\bar{\Psi}d\Psi\} \wedge * d\eta \quad (4.23)$$

Estas dos ecuaciones, junto con la condición sobre las coordenadas $*d\rho = -dz$ resumen el problema de encontrar soluciones estacionarias axisimétricas para el vacío electromagnético, del mismo modo que las ecuaciones de Ernst usuales (2.69), (2.70). En este referencial la métrica se escribe de la siguiente forma:

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} [e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 (d\phi + C dt)^2] \quad (4.24)$$

Las funciones métricas U , C , γ se obtienen de forma algebraica o por cuadraturas:

$$e^{-2U} = -\rho^{-2} \left(\frac{\eta + \bar{\eta}}{2} + \Psi\bar{\Psi} \right) \quad (4.25)$$

$$dC = -\rho^{-3} e^{4U} (2i\bar{\Psi} * d\Psi - *d\psi) \quad (4.26)$$

$$d\gamma \wedge b = -a \wedge \tilde{a} + \frac{1}{4} s \wedge \tilde{s} + \tilde{f} \wedge \tilde{f} \quad (4.27)$$

$$d\gamma \wedge *b = -a \wedge *\tilde{a} + \frac{1}{4} s \wedge *\tilde{s} + \tilde{f} \wedge *\tilde{f} \quad (4.28)$$

donde hemos orientado θ^3 paralela a b .

Ambos sistemas de ecuaciones, las ecuaciones de Ernst, (2.69)-(2.70) y (4.22)-(4.23), tienen la misma forma, intercambiando ε por η y Φ por Ψ . Sin embargo, existe una sutil diferencia escondida en el signo menos escrito delante de la norma del campo de Killing rotacional, $\|\partial_\phi\| = \rho^2 e^{-2U}$, tal como aparece en la definición del potencial η . Este signo obliga a la parte real de η a ser negativa en los casos de interés físico. De otro modo, el campo de Killing axial sería temporal. Por contra ε puede ser positivo o negativo. Además, las condiciones de planitud asintótica para ε y η son bastante diferentes:

$$\varepsilon = 1 + 0 \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.29)$$

$$\eta = -r^2 \sin^2 \theta + 0(r) \quad (4.30)$$

Aunque las ecuaciones tengan la misma forma, los potenciales tienen muy diferente significado. Por ejemplo, mientras que Φ es considerado como un potencial escalar electromagnético, Ψ debe verse como la componente axial de un potencial vector.

Se podría pensar en la siguiente transformación para generar soluciones nuevas de vacío electromagnético, como una generalización de la introducida en [16] y [17]:

$$\varepsilon \longrightarrow \eta \quad (4.31)$$

$$\Phi \longrightarrow \Psi \quad (4.32)$$

Pero esta transformación conduciría a métricas no físicas a menos que la signatura de la métrica de partida fuese $(+ - - -)$, ya que induce el siguiente cambio entre las normas de los campos de Killing:

$$e^{2U} \longrightarrow -\rho^2 e^{-2U} \quad (4.33)$$

Podría usarse, pues, para obtener nuevas soluciones a partir de regiones prohibidas de otras variedades espaciotemporales.

4.2.2 Extensión de la clase de Weyl

Un primer intento de construir nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con el formalismo irrotacional puede emprenderse haciendo uso de los ansätze que han sido útiles para resolver la ecuación de Ernst standard. Para comenzar, se puede mostrar que la familia de Weyl de electrovac estáticos [1] puede extenderse a nuevas soluciones.

El ansatz de Weyl, en función de los potenciales de Ernst, supone una dependencia funcional entre ε y Φ , que ahora son reales (Φ real supone una solución electrostática, las magnetostáticas se obtienen trivialmente a partir de ellas):

$$\varepsilon = \varepsilon(\Phi) \quad (4.34)$$

Este ansatz conduce a dos ecuaciones, que pueden integrarse, teniendo en cuenta las condiciones asintóticas (4.29):

$$\ddot{\epsilon}(\Phi) = 0 \Rightarrow e^{2U} = 1 - 2c\Phi + \Phi^2 \quad (4.35)$$

donde c es una constante.

$$d * d\Phi + b \wedge *d\Phi = \frac{-2c + 2\Phi}{1 - 2c\Phi + \Phi^2} d\Phi \wedge *d\Phi \quad (4.36)$$

que puede resolverse introduciendo una función Y , que sea solución de la ecuación de Laplace reducida:

$$d * dY + b \wedge *dY = 0 \quad (4.37)$$

por medio de la siguiente relación:

$$\Phi = \begin{cases} -\sqrt{c^2 - 1} \coth Y + c \\ -Y^{-1} + c \\ -\sqrt{1 - c^2} \cot Y + c \end{cases} \quad e^{2U} = \begin{cases} (c^2 - 1) \sinh^{-2} Y & c^2 > 1 \\ Y^{-2} & c^2 = 1 \\ (1 - c^2) \sin^{-2} Y & c^2 < 1 \end{cases} \quad (4.38)$$

Un ansatz similar puede aplicarse en la formulación irrotacional de los electrovac axisimétricos estacionarios:

$$\eta = \eta(\Psi) \quad (4.39)$$

Las ecuaciones a las que este ansatz conduce son enteramente similares a las del ansatz de Weyl:

$$\ddot{\eta}(\Psi) = 0 \Rightarrow \rho^2 e^{-2U} = c' + 2c\Psi - \Psi^2 \quad (4.40)$$

$$d * d\Psi + b \wedge *d\Psi = \frac{2c - 2\Psi}{c' + 2c\Psi - \Psi^2} d\Psi \wedge *d\Psi \quad (4.41)$$

Por razones físicas queremos que $c' + 2c\Psi - \Psi^2$ sea positivo y esto sólo puede lograrse si $c' + c^2 > 0$. Teniendo en cuenta esta restricción, los casos físicos se reducen a solamente uno:

$$\Psi = c + \sqrt{c' + c^2} \tanh Y \quad \rho^2 e^{-2U} = (c' + c^2) \cosh^{-2} Y \quad (4.42)$$

siendo Y una vez más una solución de la ecuación de Laplace reducida.

De la anterior ecuación se deduce que $\rho^2 e^{-2U}$ está acotado superiormente por $c' + c^2$ y, por tanto, estas soluciones no pueden ser asintóticamente planas,

ya que la norma del campo de Killing axial debe diverger en el infinito. Esta familia podría utilizarse para representar una espaciotiempo dotado de campo eléctrico o magnético rodeado por una fuente material a la que habría de pegarse.

4.2.3 Extensión de la familia de Papapetrou

Otro ansatz que se puede extender a este formalismo irrotacional es el de Papapetrou [45] para métricas de vacío. Siguiendo [5] podemos reescribirlo como una suposición de dependencia funcional entre la parte real e imaginaria del potencial de Ernst:

$$\varepsilon = e^{2U} + i\chi \quad U = U(\chi) \quad (4.43)$$

La partes real e imaginaria de la ecuación de Ernst implican:

$$e^{4U} = c' + 2c\chi - \chi^2 \quad (4.44)$$

siendo c y c' constantes.

$$d * d\chi + b \wedge * d\chi = \frac{2c - 2\chi}{c' + 2c\chi - \chi^2} d\chi \wedge * d\chi \quad (4.45)$$

que es similar a la que se obtuvo al integrar la extensión del ansatz de Weyl (4.41). Por tanto, el potencial de twist tiene la siguiente expresión en función de una solución arbitraria de la ecuación de Laplace reducida dimensionalmente:

$$\chi = c + \sqrt{c' + c^2} \tanh Y \quad (4.46)$$

De nuevo la condición $c' + c^2 > 0$ ha de imponerse por razones físicas. El potencial de Ernst, por tanto, adopta la siguiente forma:

$$\varepsilon = \sqrt{c' + c^2} (\cosh^{-1} Y + i \tanh Y) + i c \quad (4.47)$$

Si aplicamos este ansatz al formalismo irrotacional, $\rho^2 e^{-2U} = g(\psi)$, en vez de al habitual formalismo rígido, las ecuaciones tienen la misma forma y tenemos, por tanto, otra familia de soluciones:

$$\eta = \sqrt{c' + c^2} (\cosh^{-1} Y + i \tanh Y) + i c \quad (4.48)$$

Las mismas consideraciones sobre la forma asintótica de la extensión de Weyl realizada en el apartado anterior son válidas para esta extensión de la familia de Papapetrou.

4.3 Diagonalización del tensor de esfuerzos

Los campos electromagnéticos clásicos que no sean de radiación pueden expresarse en un referencial en el que el tensor de esfuerzos es diagonal, después de realizar una transformación de Lorentz. Implica hacer nulo el vector de Poynting escribiendo las ecuaciones en un referencial en el que el campo eléctrico y magnético son paralelos (si el invariante Lorentz $E \cdot B$ es distinto de cero) o cancelando uno de ellos (si $E \cdot B = 0$).

La misma simplificación puede aplicarse sin pérdida de generalidad en relatividad general. Corresponde a tomar $E \wedge B = 0$ en el sistema exterior y, por tanto, este queda de la siguiente forma:

$$db = 0 \quad (4.49)$$

$$da = w \wedge s \quad (4.50)$$

$$ds = (b - 2a) \wedge s \quad (4.51)$$

$$dw = -(b - 2a) \wedge w \quad (4.52)$$

$$df = -a \wedge f - is \wedge *f \quad (4.53)$$

$$d*f = (a - b) \wedge *f + iw \wedge f \quad (4.54)$$

$$d*(w - s) + 2a \wedge *w + 2(a - b) \wedge *s = 0 \quad (4.55)$$

$$d*a + b \wedge *a + \frac{1}{2}w \wedge *w - \frac{1}{2}s \wedge *s = \bar{f} \wedge *f \quad (4.56)$$

$$d*b + b \wedge *b = 0 \quad (4.57)$$

4.3.1 Campos de Maxwell parcialmente degenerados

En este apartado denominaremos parcialmente degenerados a los campos electromagnéticos que tienen uno de los invariantes Lorentz igual a cero. Existen tres casos diferentes:

Como ya se ha mencionado, cuando $E \cdot B = 0$ y $E^2 - B^2 < 0$, las ecuaciones pueden expresarse en un referencial en el que el campo eléctrico se anula. Escribiremos tan sólo las ecuaciones relevantes en las que el campo electromagnético aparece: La ecuación de Raychaudhuri y las ecuaciones de Maxwell:

$$d * a + b \wedge * a + \frac{1}{2} w \wedge * w - \frac{1}{2} s \wedge * s = B \wedge * B \quad (4.58)$$

$$dB - B \wedge a = 0 \quad (4.59)$$

$$d * B - * B \wedge (b - a) = 0 \quad (4.60)$$

$$B \wedge w = 0 \quad (4.61)$$

$$* B \wedge s = 0 \quad (4.62)$$

De las dos ecuaciones últimas obtenemos como ligadura que la vorticidad y la deformación han de ser ortogonales.

Un caso similar sucede cuando $E \cdot B = 0$ y $E^2 - B^2 > 0$. Ahora es B el campo que puede anularse. Las ecuaciones resultantes son las mismas que (4.58)-(4.62) después de cambiar B por E .

El último caso de campos parcialmente degenerados lo constituyen aquellos para los cuales $E \cdot B \neq 0$, pero $E^2 = B^2$. En consecuencia, en el referencial en el que los campos son paralelos, tenemos que $E = \pm B$ y, por tanto, E and B satisfacen las mismas ecuaciones de Maxwell, que toman la forma de las ecuaciones (4.59)-(4.62). La ecuación de Raychaudhuri para la 1-forma de aceleración varía ligeramente:

$$d * a + b \wedge * a + \frac{1}{2} w \wedge * w - \frac{1}{2} s \wedge * s = 2E \wedge * E \quad (4.63)$$

Del conjunto de tres casos de campos electromagnéticos parcialmente degenerados se deduce que una solución de uno de ellos nos provee de otras dos aplicando la siguiente regla de transformación:

$$B_{E^2 < B^2} \longrightarrow E_{E^2 > B^2} \longrightarrow \frac{1}{2} E_{E \cdot B = 0} = \pm \frac{1}{2} B_{E \cdot B = 0} \quad (4.64)$$

Aunque los tres casos representan problemas físicos diferentes, su descripción matemática es la misma.

4.3.2 Una familia de electrovacs parcialmente degenerados

Para obtener soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell haremos uso de un ansatz para el caso parcialmente degenerado magnético puro:

Tomaremos la 1-forma asociada a la deformación, s , igual a cero e imponemos la siguiente condición algebraica entre las 1-formas de la vorticidad y el campo magnético:

$$\frac{1}{2} w \wedge *w = B \wedge *B \quad (4.65)$$

Debido a la ligadura (4.61), esta ansatz implica la siguiente relación entre las formas:

$$B = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} w \quad (4.66)$$

Por tanto, tenemos dos conjuntos diferentes de ecuaciones para la vorticidad y su dual:

$$dw = -(b - 2a) \wedge w \quad (4.67)$$

$$d * w + 2a \wedge *w = 0 \quad (4.68)$$

$$dw - w \wedge a = 0 \quad (4.69)$$

$$d * w - *w \wedge (b - a) = 0 \quad (4.70)$$

que introducen una nueva ligadura:

$$b = 3a \quad (4.71)$$

Las condiciones de integrabilidad para esta ligadura no imponen ninguna restricción adicional, ya que las ecuaciones que rigen las 1-formas para la aceleración y su dual son consistentes con las que determinan b .

Sabemos que las ecuaciones para b , (4.49) y su dual (4.57), introducen las coordenadas de Weyl, ρ y z , de modo que $*dz = d\rho$. Por tanto, las únicas ecuaciones que quedan por integrar son (4.67) y (4.68), que se integran fácilmente:

$$w = \rho^{-\frac{1}{3}} dA \quad (4.72)$$

$$*w = \rho^{-\frac{2}{3}} d\chi \quad (4.73)$$

cuya condición de integrabilidad en coordenadas de Weyl es:

$$A_{\rho\rho} + \frac{1}{3\rho} A_{\rho} + A_{zz} = 0 \quad (4.74)$$

Esta ecuación es muy conocida en hidrodinámica; se trata de la ecuación de Tricomi en coordenadas canónicas cuando los parámetros permiten clasificarla como ecuación elíptica.

El potencial de twist se obtiene de las soluciones de la ecuación de Tricomi por cuadraturas:

$$\chi_{\rho} = \rho^{\frac{1}{3}} A_z \quad (4.75)$$

$$\chi_z = -\rho^{\frac{1}{3}} A_{\rho} \quad (4.76)$$

Como $a = \frac{1}{3}d \ln \rho$, la métrica adopta la siguiente forma en coordenadas de Weyl:

$$ds^2 = -c \rho^{\frac{2}{3}} (dt - A d\phi) + c^{-1} \rho^{-\frac{2}{3}} \{ \rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) \} \quad (4.77)$$

siendo c una constante positiva y γ se obtiene de las ecuaciones de Cartan una vez que la conexión ν se despeja de las ecuaciones (2.36) y (2.37). Si escribimos las componentes θ^2 y θ^3 de la tétrada como:

$$\theta^2 = e^Q dz \quad \theta^3 = e^Q d\rho \quad (4.78)$$

la función métrica $Q = \gamma - U$ puede integrarse de esta cuadratura:

$$Q_z = -\frac{3}{2} \rho^{\frac{1}{3}} A_\rho A_z \quad (4.79)$$

$$Q_\rho = -\frac{2}{9} \rho^{-1} - \frac{3}{4} \rho^{\frac{1}{3}} (A_\rho^2 - A_z^2) \quad (4.80)$$

cuya condición de integrabilidad es la propia ecuación de Tricomi (4.74).

Conociendo el dual del campo magnético $*B$, obtenemos la 2-forma de Faraday F :

$$F = \pm \frac{1}{\sqrt{2}c} d\chi \wedge d\phi \quad (4.81)$$

y el campo magnético es :

$$B = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-Q} \rho^{-\frac{1}{3}} (A_\rho \theta^2 + A_z \theta^3) \quad (4.82)$$

De la expresión general de la métrica en coordenadas de Weyl resulta obvio que no es asintóticamente plana. Esto parece deberse al hecho de que el campo gravitacional obtenido de la componente g_{00} tiene simetría cilíndrica y por tanto no puede ser originado por una fuente compacta. El campo magnético, por contra, no posee dicha simetría a menos que supongamos que A no depende de la coordenada z , en cuyo caso tendríamos un campo de Killing adicional ∂_z .

Esta familia de soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell tiene genéricamente dos campos de Killing y tipo de Petrov I. Es también genéricamente no estática.

Capítulo 5

Solución multipolar perturbativa

5.1 Introducción

El hecho de que las ecuaciones de vacío de Einstein con dos campos de Killing puedan reducirse a la resolución de la ecuación de Ernst no ha mejorado nuestro conocimiento exacto de situaciones que pudiesen replicar configuraciones físicas. Nos faltan, por ejemplo, soluciones exactas con un número finito de multipolos que pudieran ser la contrapartida relativista de las expansiones en polinomios de Legendre de la teoría clásica del potencial gravitatorio y electromagnético.

Como ya se mencionó previamente, la posibilidad de generar soluciones no nos asegura la física del resultado. Por ello, si queremos construir una solución con unas determinadas condiciones físicas, que conduzca a resultados que se puedan comprobar experimentalmente, estamos abocados a recurrir a soluciones aproximadas en la forma de desarrollos perturbativos.

La motivación física de este capítulo será el análisis de la influencia de los primeros momentos multipolares de Geroch-Hansen [26],[27] de orden superior a tres en configuraciones estacionarias con simetría axial y por reflexión ecuatorial que pudieran tener interés en astrofísica. La razón para alcanzar dicho nivel de multipolaridad radica en que las expresiones que relacionan los momentos con los coeficientes de la expansión del potencial de Ernst en el eje dejan de ser lineales a ese orden [46], hasta el punto de carecer de una expresión general para todos ellos.

En este capítulo se analizará como afectan estos términos no lineales al movimiento de partículas prueba alrededor de una distribución compacta de masa que rote estacionariamente. Por supuesto, estos términos son irrelevantes para el cálculo de correcciones astronómicas en nuestro sistema solar, pero son importantes para objetos altamente relativistas, como los púlsares, tal como se muestra en [47].

Para ello calcularemos los siete primeros términos de una expansión del potencial de Ernst en potencias inversas del radio pseudoesférico de Weyl [48], con valores arbitrarios para los momentos multipolares del campo lejano, y construiremos la métrica aproximada correspondiente.

Este resultado será empleado posteriormente para analizar dos efectos sobre las trayectorias de partículas prueba:

1. La precesión del perihelio de una órbita ecuatorial acotada.
2. La precesión de la línea de nodos de una trayectoria ligeramente inclinada y próxima a una órbita circular.

Existen trabajos previos sobre el tema en [49] y [50], pero estas referencias abarcan tan sólo hasta el momento cuadrupolar. En todo este capítulo el campo electromagnético se tomará como nulo.

5.2 Cálculo de la métrica

Hemos visto en el segundo capítulo que la métrica de vacío de una variedad espaciotemporal con simetría axial y estacionaria puede obtenerse resolviendo las ecuaciones de Ernst (2.81), (2.82), que en ausencia de campo electromagnético y en coordenadas de Weyl se reducen a la siguiente:

$$(\xi \bar{\xi} - 1) \left(\xi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \xi_{\rho} + \xi_{zz} \right) = 2 \bar{\xi} (\xi_{\rho}^2 + \xi_z^2) \quad (5.1)$$

A partir del potencial de Ernst, ξ , podemos construir la métrica por cuadraturas (2.76)-(2.78):

$$A_{\rho} = -\frac{4\rho}{(\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2} \chi_z \quad (5.2)$$

$$A_z = \frac{4\rho}{(\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2} \chi_{\rho} \quad (5.3)$$

$$\gamma_\rho = \frac{\rho}{(\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2} (\varepsilon_\rho \bar{\varepsilon}_\rho - \varepsilon_z \bar{\varepsilon}_z) \quad (5.4)$$

$$\gamma_z = \frac{\rho}{(\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2} (\varepsilon_\rho \bar{\varepsilon}_z + \varepsilon_z \bar{\varepsilon}_\rho) \quad (5.5)$$

Recordemos que las dos expresiones para el potencial de Ernst se relacionan por la siguiente igualdad:

$$\varepsilon = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} = f + i\chi \quad (5.6)$$

donde, por comodidad de la notación, escribimos f en lugar de e^{2U} .

Para calcular la solución aproximada, escribiremos el potencial ξ como una función de las coordenadas pseudoesféricas r y θ relacionadas con las de Weyl por la siguiente transformación:

$$\rho = r \sin \theta \quad (5.7)$$

$$z = r \cos \theta \quad (5.8)$$

La condición de planitud asintótica se implementa escribiendo ξ como una serie formal en potencias inversas de la coordenada radial r :

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r^{-n} \quad (5.9)$$

donde las funciones ξ_n dependen tan sólo de la coordenada θ .

Ya que estamos interesados en una solución que sea simétrica bajo reflexiones con respecto al plano ecuatorial, $\theta = \pi/2$, impondremos que las funciones ξ_n de orden impar sean reales mientras que las pares sean imaginarias. Para ello, se van introduciendo unas constantes de integración, m_n , reales las de orden par e imaginarias las de orden impar.

Dado que los resultados son bastante voluminosos, se consignan en el apéndice C, junto con la expansión de la métrica:

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{-n} \quad (5.10)$$

$$A = -i \sin^2 \theta \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n} \quad (5.11)$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{2n} r^{-2n} \quad (5.12)$$

5.3 Precesión del perihelio

5.3.1 Introducción

Es bien sabido por el teorema de Bertrand (cf. e.g.[52]) que las órbitas acotadas estables de partículas en movimiento bajo la influencia de una fuerza central que no es coulombiana ni armónica no pueden ser cerradas. En consecuencia, cuando la fuente del campo gravitatorio no es exactamente monopolar, las órbitas acotadas sobre el plano ecuatorial no están descritas por las órbitas elípticas de la primera ley de Kepler, sino por una figura abierta en la forma de una elipse precesante, si la desviación de la esfericidad es pequeña.

La situación es un tanto más complicada en relatividad general. Aunque se ha demostrado [53] que existen tan sólo dos variedades espaciotemporales asintóticamente planas, estáticas y con simetría esférica en las que las órbitas estables son cerradas, se trata de situaciones muy distintas de las clásicas y no parecen corresponder a configuraciones físicas razonables.

Por tanto, cuando los efectos relativistas son tenidos en cuenta, ni siquiera el movimiento alrededor de una distribución esférica de masa tiene sus órbitas cerradas. Este efecto se ha comprobado en nuestro sistema solar como una lenta precesión del perihelio de Mercurio. Por supuesto, los demás momentos multipolares contribuirán también a este efecto.

En consecuencia, estos momentos podrían determinarse [54] midiendo la precesión de un número adecuado de partículas prueba situadas a diferentes distancias de la fuente gravitacional.

Si las partículas de prueba son lo suficientemente pequeñas como para que las fuerzas de marea sean despreciables en el intervalo de una longitud característica de la partícula, entonces podremos considerarlas puntuales.

Si los efectos debidos a su momento angular intrínseco son irrelevantes, entonces será válida la aproximación de suponer que describen trayectorias que son geodésicas temporales de la geometría del espaciotiempo que rodea a la fuente. Por tanto, para estudiar la influencia de los momentos multipolares del campo lejano sobre las partículas, habremos de resolver las ecuaciones geodésicas para la citada geometría. En esta sección nos limitaremos al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.

5.3.2 Ecuación geodésica

Debido a que las coordenadas temporal y acimutal son cíclicas, tenemos dos integrales primeras del movimiento correspondientes a las cantidades conservadas E y l , respectivamente la energía total y la proyección del momento angular sobre el eje z , ambas por unidad de masa, de la partícula prueba. Escritas en función de la cuadrivelocidad de esta:

$$u = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad (5.13)$$

estas cantidades adoptan la siguiente expresión:

$$E = -\partial_t \cdot u = f (\dot{t} - A\dot{\phi}) \quad (5.14)$$

$$l = \partial_\phi \cdot u = f A (\dot{t} - A\dot{\phi}) + \frac{1}{f} r^2 \dot{\phi} \quad (5.15)$$

El punto sobre las variables denota derivación respecto al tiempo propio de la partícula.

Las ecuaciones de evolución para las coordenadas t y ϕ se pueden escribir, por tanto, de la forma siguiente:

$$\dot{\phi} = f \frac{l - E A}{r^2} \quad (5.16)$$

$$\dot{t} = \frac{E}{f} + f A \frac{l - E A}{r^2} \quad (5.17)$$

Una tercera integral del movimiento relativista tiene su origen en el hecho de que la cuadrivelocidad tiene módulo menos uno:

$$-1 = u \cdot u = -f(\dot{t} - A\dot{\phi})^2 + \frac{1}{f}(e^{2\gamma} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) \quad (5.18)$$

Podemos despejar \dot{r} de las anteriores expresiones como función de las coordenadas no cíclicas y las constantes del movimiento. Sin embargo, ya que estamos interesados en la forma de la órbita más que en su evolución temporal, dividiremos la ecuación (5.18) por $\dot{\phi}$ para obtener la derivada de la coordenada radial respecto al ángulo acimutal:

$$r_{\phi}^2 = e^{-2\gamma} \left\{ \frac{r^4 (E^2 - f)}{f^2 (l - EA)^2} - r^2 \right\} \quad (5.19)$$

Al igual que se hace en mecánica clásica, será útil reescribir la ecuación usando una nueva función como incógnita, $u = 1/r$:

$$u_{\phi}^2 = e^{-2\gamma} \left\{ \frac{E^2 - f}{f^2 (l - EA)^2} - u^2 \right\} = F(u) = \sum_{n=0}^6 c_n u^n + O(u^7) \quad (5.20)$$

Esta ecuación se vuelve más manejable si la derivamos respecto a ϕ y cancelamos los factores u_{ϕ} , ya que para el estudio de la precesión del perihelio las órbitas circulares no son de interés:

$$u_{\phi\phi} = \frac{1}{2} F'(u) \quad (5.21)$$

Para resolver perturbativamente estas ecuaciones necesitamos un parámetro pequeño en el que realizar una expansión en serie de potencias. Un buen candidato es el inverso del momento angular específico, l . De acuerdo con la tercera ley de Kepler, una buena aproximación a grandes distancias de la fuente, se comporta como:

$$l \sim \sqrt{m r} \quad (5.22)$$

donde m es la masa de la partícula. Podemos combinarlo con la masa de la fuente, m_0 , para obtener un parámetro pequeño aceptable para el análisis del campo gravitatorio lejano. Definiremos, por tanto:

$$\epsilon = m_0/l \quad (5.23)$$

y expandiremos u de la siguiente forma en el parámetro ϵ :

$$u = \epsilon^2 \sum_{n=0}^{11} u_n \epsilon^n + O(\epsilon^{14}) \quad (5.24)$$

La razón para comenzar la expansión a este orden se debe a que la expresión para la órbita de Kepler, primer término del desarrollo, es de segundo orden en ϵ .

La energía específica de la partícula también se expandirá en el parámetro ϵ :

$$E = 1 + \epsilon^2 \sum_{n=0}^{n=11} E_n \epsilon^n + O(\epsilon^{14}) \quad (5.25)$$

Para evitar la aparición de términos seculares usaremos una nueva coordenada ψ relacionada con ϕ por medio de:

$$\psi = \omega \phi \quad (5.26)$$

$$\omega = \sqrt{1 + \sum \omega_i \epsilon^i} \quad (5.27)$$

Los coeficientes c_n son todos del orden ϵ^2 excepto c_2 que es claramente de orden cero en ϵ . En consecuencia la ecuación (5.20) tiene la forma de una jerarquía de osciladores armónicos forzados, que puede resolverse iterativamente hasta el orden de precisión permitido por nuestro conocimiento de la métrica:

$$u_{n\psi\psi} + u = f_n(\psi) \quad (5.28)$$

Los primeros términos del desarrollo de la solución de las ecuaciones (5.20) y (5.21) en potencias del parámetro ϵ son:

$$u_0 = \frac{1}{m_0} (1 + \sqrt{1 + 2 E_0} \cos \psi) \quad (5.29)$$

$$u_1 = 0 \quad (5.30)$$

$$u_2 = \frac{4 E_0 + 6}{m_0} \quad (5.31)$$

$$u_3 = \frac{i m_1}{m_0^3} (4 E_0 + 8) \quad (5.32)$$

Las expresiones para la energía específica y la frecuencia ω se incluyen en el apéndice C. Están escritas en función de los momentos de Geroch-Hansen y del momento angular y son, por tanto, invariantes bajo cambios de coordenadas.

5.3.3 Resultado perturbativo

Dado que ω es distinta de uno, la órbita no es cerrada, ya que la coordenada radial no es periódica en el ángulo acimutal sino en ψ :

Entre dos pasos consecutivos por el perihelio, la partícula prueba describe un ángulo $2\pi/\omega$. Por tanto, el perihelio se ha desplazado un ángulo $\Delta\phi$ dado por la expansión en el parámetro ϵ :

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & 2\pi(\omega^{-1} - 1) = \pi \{ \Delta_{class} + \Delta_{mon} + \Delta_{dip} + \Delta_{quad} + \Delta_{oct} + \\ & + \Delta_{sed} + \Delta_{trig} + \Delta_{d-q} + \Delta_{d-o} + \Delta_{d-s} + \Delta_{q-o} \} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Los resultados, un tanto extensos, figuran en el apéndice C. El desplazamiento del perihelio se ha dividido en diversos términos que hacen referencia a su contenido multipolar:

El primero, Δ_{class} , engloba la contribución newtoniana a la precesión, es decir, los términos que permanecen después de tomar el límite clásico $c \rightarrow \infty$. Por supuesto sólo los momentos de masa están presentes, ya que la rotación de la fuente no tiene ninguna influencia en la dinámica newtoniana.

Hasta el momento hemos trabajado en unidades geometrizadas en las que la velocidad de la luz y la constante de acoplo gravitatorio se toman iguales a uno. Por ello, los términos parecen tener igual magnitud. Sin embargo, si los factores necesarios son incorporados (un factor G/c para cada ϵ , un factor G/c^2 par cada P_{2n} , un factor G/c^3 par cada P_{2n+1} , un factor c^{-1} par cada l y un factor G^{-2} para cada E_0), la magnitud real de los términos se recupera.

Por ejemplo, el primer término newtoniano lleva un factor G^2 y el segundo, un factor G^4 . Para distribuciones de masa achatadas, el momento cuadrupolar, P_2 es negativo, por lo cual contribuye positivamente al avance del perihelio en el primer orden, mientras que el término cuadrático es positivo siempre. La energía newtoniana no puede alterar el signo global ya que está acotada inferiormente por $-1/2$. Por otra parte, el término sedequim-polar, P_4 , es de signo opuesto al lineal cuadrupolar.

El segundo término, Δ_{mon} , comprende la corrección relativista a la precesión del perihelio debida a una distribución esférica de masa, es decir, el

efecto Schwarzschild. Puede calcularse exactamente haciendo uso de funciones elípticas y es del orden G^2/c^2 . La contribución a cada orden es siempre positiva.

El término Δ_{dip} recoge la influencia de un dipolo de rotación en la precesión del perihelio. Es del orden G^2/c^2 . Ya que sus términos primeros son impares en ϵ , es sensible al sentido de rotación relativa de la partícula respecto a la fuente: Es positivo si el momento angular de la fuente y el momento orbital de la partícula prueba son antiparalelos y negativo en caso contrario.

Este fenómeno contradice la intuición, ya que se podría pensar que la rotación de la fuente debería “arrastrar^a la partícula. Una explicación cualitativa reside en el hecho de que el avance del perihelio debido a un monopolo de masa decrece con el momento angular orbital de la partícula prueba: Si la fuente está rotando y su momento angular es J , entonces l se sustituye en el primer orden por $l + 2J/r$, como puede verse en la ecuación (5.20), después de sustituir P_1 por iJ . Por ello, el momento angular “efectivo” aumenta si ambos momentos son paralelos, con lo cual es de esperar que el avance del perihelio disminuya.

Por contra, los términos cuadráticos en P_1 son independientes del sentido de rotación y son siempre positivos, por lo que inducen un avance del perihelio. Los términos cúbicos se comportan como los lineales en P_1 .

Con el nombre Δ_{quad} englobamos los términos relativistas que dependen exclusivamente de la masa y el momento cuadrupolar, P_2 . La primera corrección es del orden G^4/c^2 . No depende del sentido de rotación y es positiva para fuentes achatadas, como su análoga newtoniana. Los términos cuadráticos son siempre positivos.

El símbolo Δ_{oct} denota las correcciones al desplazamiento del perihelio debidas al momento rotacional octupolar P_3 . La primera corrección es del orden G^4/c^2 . Mantiene la misma relación respecto al término dipolar que el cuadrupolar respecto al monopolar: Varía el signo global.

La contribución relativista del momento gravitacional sedequimpolar, P_4 , se incluye en Δ_{sed} y no aparece hasta el décimo nivel perturbativo. En unidades no geometrizadas es proporcional a G^6/c^2 .

El último momento multipolar considerado es el momento trigintaduopolar, P_5 , y su influencia se engloba en Δ_{trig} . Es del orden de G^6/c^2 .

A continuación revisamos los acoplos entre momentos multipolares que no sean la masa:

Hasta el orden considerado no hay acoplos relativistas entre los momentos gravitacionales, aparte de los autoacoplos, pero hay acoplos rotación-rotación

y rotación-gravitación.

El primero en aparecer es el acoplo dipolo-cuadrupolo, Δ_{d-q} . Lleva un factor G^4/c^2 en el orden más bajo. La contribución de los términos bilineales es positiva si los momentos angulares de la partícula y la fuente gravitacional son antiparalelos y esta última es achatada ($P_2 < 0$). Los términos cuadráticos en el momento cuadrupolar P_2 serán positivos si J y l son antiparalelos. Finalmente los términos cuadráticos en el momento dipolar son positivos para fuentes achatadas.

El único acoplo rotación-rotación a este orden sucede entre el dipolo y el octupolo y se denota por Δ_{d-o} . Es cuando menos del orden G^6/c^4 . Este término no es sensible al sentido de rotación ya que es bilineal en los momentos rotacionales.

Los demás acoplos entre momentos rotacionales y gravitacionales involucran al dipolo rotacional y al sedequimipolo gravitacional, Δ_{d-s} , y al octupolo rotacional y al cuadrupolo gravitacional, Δ_{q-o} . Ambos aparecen en primer lugar en el undécimo orden perturbativo y son al menos del orden de G^6/c^2 . El término Δ_{d-s} es positivo si P_4 es positivo y los momentos angulares son antiparalelos.

En resumen, se observa que las contribuciones de los momentos multipolares gravitacionales y rotacionales siguen un peculiar esquema de alternancia de signos:

La contribución monopolar es siempre positiva, mientras que el término lineal en el momento cuadrupolar es negativo para P_2 positivo (los términos cuadráticos son positivos siempre) y el término sedequimipolar es otra vez positivo para P_4 positivo. El sexagintacuadrupolo P_6 escapa a los límites de esta expansión perturbativa.

Si consideramos una distribución de masa próxima a un elipsoide achatado homogéneo clásico, observamos también una secuencia de signos alternados

$$P_{2n} = \frac{3 P_0 (c^2 - a^2)^n}{(2n + 1)(2n + 3)} \quad (5.34)$$

donde c y a representan las longitudes de los semiejes del elipsoide paralelo y ortogonal, respectivamente, al eje de simetría.

Para este elipsoide de revolución, todas las contribuciones al avance del perihelio serían positivas.

Los términos lineal y cúbico en el momento dipolar rotacional son siempre positivos para configuraciones contrarrotantes de la fuente y la partícula

de prueba mientras que el término dependiente del octupolo es positivo si $J_3 = -i P_3$ y l poseen el mismo signo. El término trigintaduopolar lleva el mismo signo que el dipolar.

El signo de la contribución de los términos de acoplo sigue una sencilla regla: Se obtiene como producto de los factores menos uno que preceden a los correspondientes términos lineales de los momentos multipolares que generan el acoplo.

Los términos independientes del signo, tales como el término de Schwarzschild, los términos cuadráticos en el momento dipolar y los términos cuadráticos en el momento cuadrupolar son todos positivos, contribuyendo a un avance del perihelio.

Sería de gran interés conocer el dominio de validez de esta expansión perturbativa. En el siguiente apartado se estudia un caso más simple, la región del espacio de parámetros en la que los desarrollos son aceptables para la métrica de Schwarzschild.

5.3.4 Convergencia de la expansión monopolar

En este apartado se estudiará la aplicabilidad de la anterior expansión perturbativa para órbitas acotadas en el espaciotiempo de Schwarzschild. Para esta métrica la ecuación geodésica (5.20) se puede resolver exactamente por medio de funciones elípticas. En lugar de escribirla como una ecuación diferencial para u como función de ϕ , la escribimos como una ecuación diferencial para ϕ . En este apartado u no representa el inverso del radio pseudoesférico, sino el inverso del radio de Boyer-Lindquist:

$$\phi_u = \left(2 P_0 u^3 - u^2 + \frac{2 P_0}{l^2} u + \frac{E^2 - 1}{l^2} \right)^{-1/2} = g(u)^{-1/2} \quad (5.35)$$

Estamos considerando que la energía específica es menor que uno y, por tanto, $g(u)$ tiene un cero al menos. Para tener movimiento acotado necesitamos tres raíces para que la órbita oscile entre los puntos apsidales. Denominaremos a los ceros de la ecuación como:

$$a \geq b \geq c \geq 0 \quad (5.36)$$

La ecuación (5.35) puede resolverse [55] por medio de integrales elípticas de la primera especie, $F(\gamma, q)$, en la región $b \geq u > c$:

$$(\phi - \phi_0) \sqrt{\frac{P_0(a-c)}{2}} = F(\gamma, q) = \int_0^\gamma d\alpha (1 - q^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2} \quad (5.37)$$

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\frac{u-c}{b-c}} \quad (5.38)$$

$$q = \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \quad (5.39)$$

Una expresión para u como función de ϕ se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que el seno elíptico es el seno de $F(\gamma, q)$:

$$u = c + (b-c) \operatorname{sn}^2 \left\{ \sqrt{\frac{P_0(a-c)}{2}} (\phi - \phi_0) \right\} \quad (5.40)$$

Dado que el período real del seno elíptico es $4K(q) = 4F(\pi/2, q)$, nuestra función u es $2K(q)$ -periódica.

Por tanto, la precesión exacta del perihelio de la órbita de una partícula prueba alrededor de un objeto esférico no rotante será:

$$\Delta\phi = \frac{2\sqrt{2}K(q)}{\sqrt{P_0(a-c)}} - 2\pi \quad (5.41)$$

La expansión perturbativa en ϵ de la anterior expresión coincide con la calculada previamente como Δ_{mon} en la ecuación (C.56), como era de esperar.

$$K(q) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \right)^2 q^{2n} \right\} \quad (5.42)$$

Los límites del campo de aplicabilidad de la anterior expansión son $q = 1$ ($a = b$) y $q = 0$ ($b = c$). Para ambos valores hay dos ceros de $g(u)$ que colapsan y el movimiento acotado deja de ser estable.

Por ello, tendremos que estudiar para qué parámetros $g(u)$ tiene raíces dobles. Esto sucede cuando u toma cualquiera de los valores u_{\pm} que son solución de $g'(u) = 0$:

$$u_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12\epsilon^2}}{6P_0} \quad (5.43)$$

Figura 5.1: Región de convergencia del desarrollo perturbativo en el plano $E^2 - \epsilon^2$.

La región permitida es la comprendida ente las curvas $g(u_{\pm}) = 0$ en el espacio de parámetros $E^2 - \epsilon^2$. Esto nos proporciona valores críticos para la energía específica y el parámetro perturbativo:

$$E_c^2 = 8/9 \quad (5.44)$$

$$\epsilon_c^2 = 1/12 \quad (5.45)$$

El tratamiento perturbativo no es válido más allá de este punto en el espacio de parámetros, ya que no hay órbitas acotadas estables.

Es de destacar que para $\epsilon^2 > 1/16$ no sólo hay un límite inferior para la energía de la órbita acotada, sino también un límite superior.

5.4 Precesión de la línea de nodos

5.4.1 Introducción

Consideremos una órbita acotada que se separe ligeramente del plano ecuatorial: Si la distribución de masa fuera exactamente esférica, el plano ecuatorial no sería en absoluto privilegiado y la trayectoria lo intersectaría siempre en los mismos nodos. Sin embargo, la situación cambia cuando la fuente gravitacional no es esféricamente simétrica, ya que entonces los nodos precesan en cada revolución debido a la perturbación generada por los momentos multipolares superiores.

En la mecánica clásica no relativista la primera contribución a la precesión de la línea de nodos procede del momento cuadrupolar, como se muestra en el siguiente apartado, mientras que en relatividad general el primero en contribuir es el momento dipolar de rotación.

Para los cálculos subsiguientes tomaremos a modo de referencia una órbita circular y consideraremos trayectorias próximas a ella. De este modo se pierden los interesantes efectos debidos a la excentricidad de la órbita de referencia, pero los cálculos son ya de por sí demasiado voluminosos para abordarlos aquí.

5.4.2 Cálculo clásico

En este apartado derivaremos la expresión clásica de la precesión de la línea de nodos:

El lagrangiano que describe el movimiento de una partícula en un campo gravitacional es:

$$L = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - V(r, \theta) \quad (5.46)$$

$$V(r, \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n p_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \quad (5.47)$$

Las ecuaciones y constantes del movimiento que se obtienen de este lagrangiano son las siguientes:

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + V(r, \theta) \quad (5.48)$$

$$l = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (5.49)$$

$$\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \partial_r V(r, \theta) \quad (5.50)$$

$$r^2 \ddot{\theta} + 2r \dot{r} \dot{\theta} = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \partial_{\theta} V(r, \theta) \quad (5.51)$$

Si truncamos la expansión en polinomios de Legendre en el momento sexagintacuadrupolar, P_6 , obtenemos las siguientes expresiones para la energía específica, E , y el radio, R , de las órbitas circulares en el plano $\theta = \pi/2$ en la región del campo lejano:

$$E = -\frac{P_0^2}{2l^2} + \frac{P_0^3 P_2}{2l^6} - \frac{3P_0^5 P_4 + 9P_0^4 P_2^2}{8l^{10}} + O(l^{-14}) \quad (5.52)$$

$$R^{-1} = \frac{P_0}{l^2} - \frac{3P_2 P_0^2}{2l^6} + \frac{36P_2^2 P_0^3 + 15P_4 P_0^4}{8l^{10}} + O(l^{-14}) \quad (5.53)$$

Para obtener la expresión de las oscilaciones en torno al plano ecuatorial de una órbita acotada, ligeramente inclinada respecto a una trayectoria circular en ese plano, tomaremos variaciones en la ecuación (5.51). El resultado lo dividiremos por $\dot{\phi}^2$, que es constante sobre el círculo de referencia, para obtener $\delta\theta$ como función de ϕ :

$$(\delta\theta)_{\phi\phi} = -\Omega^2 \delta\theta \quad (5.54)$$

$$\Omega = \sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2} V_{\theta\theta}(R, \pi/2)} \quad (5.55)$$

De esta expresión obtenemos la frecuencia de las oscilaciones, Ω , que se puede escribir en función del momento angular específico l y los momentos multipolares, insertando la fórmula para el radio (5.53).

Los nodos evolucionan con la frecuencia Ω , que es diferente de la unidad. Por tanto la precesión por revolución de la línea de nodos es distinta de cero:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 2\pi \left(\frac{1}{\Omega} - 1 \right) = \frac{3\pi P_2 P_0}{l^4} + \frac{\pi (9 P_0^2 P_2^2 - 30 P_0^3 P_4)}{4 l^8} + \\ &+ \frac{\pi (81 P_0^3 P_2^3 + 45 P_0^4 P_2 P_4 + 105 P_0^5 P_6)}{8 l^{12}} + O(l^{-16}) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Este resultado será discutido en el apartado siguiente junto con los términos de procedencia relativista.

5.4.3 Cálculo relativista

El cálculo realizado en la sección anterior puede repetirse dentro del formalismo de la relatividad general, utilizando variaciones sobre las ecuaciones geodésicas:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0 \quad (5.57)$$

Las geodésicas que difieran de una dada en un pequeño vector δ^μ satisfarán la siguiente ecuación:

$$\ddot{\delta}^\mu + 2 \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \dot{\delta}^\rho \dot{x}^\sigma + \Gamma_{\rho\sigma,\nu}^\mu \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \delta^\nu = 0 \quad (5.58)$$

Ya que estamos interesados en las pequeñas desviaciones respecto al plano ecuatorial, concentraremos la atención sobre la componente δ^θ .

Teniendo en cuenta que la geodésica de referencia se halla sobre un plano de simetría, las primeras derivadas de la métrica respecto a θ se anulan sobre él. La ecuación de desviación geodésica para δ^θ se reduce a la siguiente expresión:

$$\ddot{\delta}^\theta - \frac{1}{2} g^{\theta\theta} g_{\rho\sigma,\theta\theta} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \delta^\theta = 0 \quad (5.59)$$

En vez de considerar una geodésica arbitraria en el plano ecuatorial, seguiremos restringiéndonos a círculos de referencia.

Para calcular la evolución de los nodos con respecto a la coordenada acimutal, tal como se hizo en el apartado anterior, dividiremos la ecuación precedente por $\dot{\phi}^2$, que es constante en el círculo.

En lo sucesivo escribiremos δ en vez de δ^θ para aliviar la notación:

$$\delta_{\phi\phi} + \Omega^2 \delta = 0 \quad (5.60)$$

$$\Omega^2 = -\frac{1}{2\dot{\phi}^2} g^{\theta\theta} g_{\rho\sigma,\theta\theta} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \quad (5.61)$$

siendo evaluada cada función en el círculo $\theta = \pi/2$, $r = R$.

La ecuación previa afirma que los nodos de las geodésicas próximas están espaciados regularmente por intervalos de la coordenada ϕ . Si Ω es distinta de uno, estos nodos recorrerán el círculo de referencia en vez de permanecer en valores constantes del ángulo acimutal.

Dada la libertad existente en relatividad general para la elección de coordenadas y nuestro desconocimiento para determinar las apropiadas desde el punto de vista de la física, resulta conveniente expresar el resultado de una forma independiente de estas.

Será necesario eliminar toda dependencia en el radio R , del círculo geodésico y, para eliminar parámetros, expresar la energía específica E , como función del momento angular por unidad de masa de la órbita circular, l , de modo que en el resultado final sólo aparezcan los momentos multipolares y l .

Ambos datos son conocidos a partir de la expansión perturbativa realizada en la sección anterior para las geodésicas ecuatoriales: Conocemos E y u , el inverso del radio, hasta un orden alto en l . Sólo hace falta particularizarlos para u constante y sustituirlos en la ecuación (5.61) para la frecuencia angular.

Una vez más, los resultados son demasiado prolijos para incluirse en el cuerpo de esta memoria y, por ello, ocupan una sección independiente en el apéndice C.

5.4.4 Resultado

La frecuencia de precesión de los nodos puede escribirse ahora independientemente de la elección de coordenadas. Como era de esperar, el primer término

es igual a uno, como corresponde a la frecuencia de los nodos cuando la distribución de masa de la fuente gravitacional es esféricamente simétrica:

$$\Omega^2 = 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \Omega_n l^{-n} \quad (5.62)$$

Las diversas contribuciones a la precesión de la línea de nodos de una geodésica próxima a un círculo geodésico ecuatorial han sido clasificadas de la misma forma como se hizo para la precesión del perihelio: Un término clásico más uno relativista, dividido este último de acuerdo a su contenido multipolar.

Para escribir las expresiones en un sistema de unidades no geometrizado hace falta incluir los factores G y c tal como se describieron en la sección anterior.

No hay, desde luego, contribución del monopolo de masa. Si la frecuencia fuera la unidad, los nodos permanecerían en un ángulo ϕ constante. Por tanto el ángulo precesado en una revolución vendrá descrito por:

$$\Delta\phi = 2\pi (\Omega^{-1} - 1) \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \Delta\phi = & \pi \{ \Delta_{class} + \Delta_{dip} + \Delta_{quad} + \Delta_{oct} + \Delta_{sed} + \Delta_{trig} + \Delta_{d-q} + \\ & + \Delta_{d-o} + \Delta_{d-q} + \Delta_{q-o} \} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Comencemos por la contribución clásica: Para objetos oblatos ($P_2 < 0$), la influencia del cuadrupolo de masa supone un retraso en la precesión de la línea de nodos con respecto a la coordenada ϕ del círculo de referencia. Por tanto, la línea de nodos no precesa en la misma dirección que el perihelio. Este hecho no debe confundirse con la precesión del vector de momento angular en el tiempo, que sí es positiva. La contribución del término sedequimpolar es negativa para P_4 positivo y la del momento sexagintaduopolar es positiva para P_6 positivo. Hay también un acoplo clásico entre P_4 y P_2 . Los términos no lineales en el momento cuadrupolar son positivos. Esta es la información que se extrae del término clásico.

La mayoría de los términos que dependen del momento dipolar son sensibles al sentido de rotación de la partícula prueba respecto a la rotación de la fuente. Si los momentos angulares son paralelos (l y $J = -i P_1$ tienen el mismo signo), entonces los términos lineales y cúbicos en P_1 inducen un avance

de la línea de nodos. Por otra parte, los términos cuadráticos y cuárticos suponen siempre un retraso, independientemente del signo de la rotación.

La contribución relativista del momento cuadrupolar P_2 , al igual que la clásica, es positiva para fuentes achatadas. Los términos cuadráticos, en cambio, suponen una contribución negativa al desplazamiento de la línea de nodos, sea o no la fuente achatada. Recordemos que la contribución cuadrática clásica es positiva.

Como ocurría para la precesión del perihelio, el término en el momento octupolar lleva el signo opuesto al del momento dipolar y es también dependiente del sentido de rotación relativa.

El término de contribución sedequimpolar tiene el mismo signo que su homólogo clásico, aunque es mucho más pequeño que este. No hay contribución relativista de P_6 a este orden perturbativo, aunque sí la hay clásica.

Después de comprobar que el término en P_5 tiene el mismo signo que el término lineal en el momento dipolar rotacional, estamos en condiciones de afirmar que la alternancia de signos de los términos lineales observada en la precesión del perihelio se mantiene en el desplazamiento de la línea de nodos: Si los momentos multipolares P_{2n} fuesen todos positivos, la contribución lineal de cada P_{2n} se opondría a la de P_{2n+2} y lo mismo sucede con los momentos rotacionales, hasta este orden perturbativo al menos.

Para el caso ya considerado de una figura muy próxima a un elipsoide de revolución achatado, las contribuciones de los términos lineales son todas negativas, lo cual refleja una tendencia al retraso de la línea de nodos.

A continuación discutiremos los términos de acoplo, comenzando por el acoplo dipolo-cuadrupolo: El acoplo bilineal entre el momento dipolar y el cuadrupolar es positivo para fuentes gravitacionales prolatas si la partícula rota en el mismo sentido que aquella. El término cuadrático en P_1 es positivo para fuentes achatadas, sin que importen los sentidos de rotación. El término cuadrático en P_2 es positivo si los momentos angulares J y l son paralelos.

El acoplo rotacional bilineal entre los momentos dipolar y octupolar es independiente del sentido de rotación y es positivo cuando $J = -iP_1$ y $J_3 = -iP_3$ tienen el mismo signo. Existe, no obstante, un acoplo superior, cuadrático en el momento dipolar, que contribuye a la precesión de la línea de nodos en la misma forma en que lo hace el término lineal de Δ_{oct} .

Los últimos términos considerados hasta este orden son los acoplos entre P_1 y P_4 y entre P_2 y P_3 , que son dependientes del sentido de rotación relativa de la fuente y la partícula prueba.

Observamos que los términos de acoplo relativista se oponen a los términos

lineales en los momentos multipolares: Llevan el signo opuesto al que se esperaría del producto de los factores -1 que preceden a los correspondientes términos lineales. Así, por ejemplo, si los términos lineales en P_1 y P_2 son ambos positivos, entonces el acoplo bilineal entre dichos momentos será negativo.

Por contra, esta regla no es válida para los acoplos newtonianos. Como tampoco influye el momento gravitacional sexagintaduopolar P_6 en la precesión del perihelio, a este orden, y sí lo hace en el desplazamiento de la línea de nodos.

Tampoco existían acoplos entre los momentos gravitacionales (excluidos los autoacoplos y acoplos con la masa) en la precesión del perihelio hasta este nivel perturbativo, pero existe uno (el acoplo clásico $P_2 - P_4$) en la precesión de la línea de nodos.

Es curioso que, mientras que los términos clásicos que no dependen del signo de los momentos multipolares son positivos, los relativistas (los autoacoplos cuadráticos del momento dipolar y del momento cuadrupolar) son negativos.

Por supuesto, la mayoría de estas correcciones son irrelevantes para cálculos astronómicos en nuestro sistema solar, pero han de tener su influencia en objetos altamente relativistas, como nubes de polvo y discos de acreción orbitando en torno a púlsares y agujeros negros, donde otros efectos post-newtonianos [47] han sido mostrados.

Capítulo 6

Estudio de una cosmología

6.1 Introducción

En este capítulo abordamos el análisis de una solución cosmológica de fluido perfecto hallada por Senovilla, [22], la primera descubierta que no tiene singularidades de curvatura. Se trata de una solución con un grupo de isometrías bidimensional que dota de simetría cilíndrica a la variedad espaciotemporal. La ecuación de estado corresponde a radiación incoherente, con lo cual podría describir, con las limitaciones del grupo de isometrías, un universo en su etapa inicial, dominado por la radiación.

El hecho de que los invariantes de curvatura sean regulares no garantiza que el espaciotiempo esté libre de singularidades. Un ejemplo lo constituye la solución de Taub-NUT [56], que a pesar de tener invariantes de curvatura regulares contiene geodésicas que no son completas, es decir que no pueden extenderse a valores arbitrarios de su parámetro afín. Estamos adoptando, por tanto, la definición incluida en [57] de espaciotiempo no singular como aquel cuyas curvas no espaciales son completas en un parámetro afín generalizado (b-completitud). Al representar éstas trayectorias físicas, se considera singular el que culminen en un tiempo propio finito, pues un posible observador evolucionando a lo largo de una de ellas vería truncada su historia.

El objetivo de este capítulo será mostrar que la solución [22] es geodésicamente completa [58] y, en consecuencia, libre de singularidades. También se mostrará la concordancia de la solución con los poderosos teoremas sobre la existencia de singularidades [57], [59], así como otras propiedades de la solución, tales como condiciones sobre causalidad, hiperbolicidad global y energía.

La solución en cuestión [22] posee el siguiente elemento de línea:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \cosh^4(at) \cosh^2(3a\rho) (-dt^2 + d\rho^2) + \\ &+ (9a^2)^{-1} \cosh^4(at) \sinh^2(3a\rho) \cosh^{-2/3}(3a\rho) d\phi^2 + \\ &+ \cosh^{-2}(at) \cosh^{-2/3}(3a\rho) dz^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

siendo $a \neq 0$ una constante arbitraria relacionada con la densidad máxima de energía.

Las coordenadas son cilíndricas con el rango habitual y permiten que la métrica sea inextensible y regular en el eje de simetría. La coordenada temporal varía a lo largo de toda la recta real.

El tensor de esfuerzos, en función de la cuadrivelocidad del fluido, u , su densidad, μ , y su presión, p , viene dado por:

$$T = \mu u \otimes u + p ({}^4g + u \otimes u) \quad (6.2)$$

$$u = \cosh^{-2}(at) \cosh^{-1}(3a\rho) \partial_t \quad (6.3)$$

de donde se deduce que las coordenadas son comóviles y que la congruencia del fluido es ortogonal a las hipersuperficies de tiempo constante.

$$\mu = 15a^2 \cosh^{-4}(at) \cosh^{-4}(3a\rho) \quad (6.4)$$

$$p = \frac{\mu}{3} \quad (6.5)$$

como corresponde a una ecuación de estado de radiación incoherente.

Tanto la densidad como la presión son finitas, lo cual unido a la finitud de los invariantes construidos a partir del tensor de Weyl [22], permite afirmar que no hay singularidades en la curvatura.

Las cantidades cinemáticas del fluido: La vorticidad, ω , la expansión, θ , σ y la aceleración, a , tienen las siguientes expresiones:

$$\omega = 0 \quad (6.6)$$

(como corresponde al hecho de que la congruencia del fluido y las hipersuperficies de tiempo constante son ortogonales),

$$\theta = 3a \sinh(at) \cosh^{-3}(at) \cosh^{-1}(3a\rho) \quad (6.7)$$

que determina una fase contractiva para tiempos negativos y expansiva par tiempos positivos.

$$a = 3 a \sinh(3 a \rho) \cosh^{-3}(3 a \rho) \cosh^{-4}(a t) \partial_\rho \quad (6.8)$$

lo que muestra que las líneas de fluido no son geodésicas.

La expresión de la deformación no nos interesa para nuestros fines, pero puede encontrarse en la referencia [22].

6.2 Ausencia de singularidades

6.2.1 Completitud geodésica

Para demostrar que las geodésicas causales son completas, escribiremos las ecuaciones de las geodésicas para la métrica (6.1) y veremos que sus soluciones se pueden extender indefinidamente en el parámetro afín.

Existen tres constantes del movimiento: Una de ellas, L asociada a la invariancia bajo traslaciones a lo largo del eje z , otra, K , asociada a la invariancia bajo rotaciones axiales y una tercera, δ , que toma el valor cero para geodésicas de género luz y uno para las de género tiempo:

$$K = (9a^2)^{-1} \cosh^4(at) \sinh^2(3a\rho) \cosh^{-2/3}(3a\rho) \dot{\phi} \quad (6.9)$$

$$L = \cosh^{-2}(at) \cosh^{-2/3}(3a\rho) \dot{z} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} -\delta &= \cosh^4(at) \cosh^2(3a\rho) (-\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2) + \\ &+ (9a^2)^{-1} \cosh^4(at) \sinh^2(3a\rho) \cosh^{-2/3}(3a\rho) \dot{\phi}^2 + \\ &+ \cosh^{-2}(at) \cosh^{-2/3}(3a\rho) \dot{z}^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Las restantes ecuaciones geodésicas se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} &\ddot{t} + 2a \tanh(at) (\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2) + 6a \tanh(3a\rho) \dot{t} \dot{\rho} + \\ &+ \frac{2}{9a} \tanh(at) \sinh^2(3a\rho) \cosh^{-8/3}(3a\rho) \dot{\phi}^2 - \\ &- a \cosh^{-7}(at) \sinh(at) \cosh^{-8/3}(3a\rho) \dot{z}^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\rho} + 3a \tanh(3a\rho) (\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2) + 4a \tanh(at) \dot{t} \dot{\rho} - \\
& - \frac{1}{9a} \sinh(3a\rho) \cosh^{-5/3}(3a\rho) [3 - \tanh^2(3a\rho)] \dot{\phi}^2 + \\
& + a \cosh^{-6}(at) \sinh(3a\rho) \cosh^{-11/3}(3a\rho) \dot{z}^2 = 0
\end{aligned} \tag{6.13}$$

donde se denota la derivada respecto al parámetro afín por un punto.

Dado que las funciones que aparecen en las ecuaciones son de clase C^∞ , las soluciones del sistema existen y son únicas. De ahora en adelante nos limitaremos a geodésicas evolucionando hacia el futuro ($\dot{t} > 0$). La evolución hacia el pasado se puede estudiar de forma análoga.

La demostración de la completitud geodésica se fundamenta en el estudio de las segundas derivadas de las coordenadas radial y temporal, puesto que la componente \dot{z} de la velocidad está acotada y, por tanto, no puede ser singular. La componente $\dot{\phi}$ tan sólo plantea problemas en el eje $\rho = 0$, pero veremos que esta es una región prohibida para geodésicas causales con momento angular distinto de cero. Veremos, por una parte, que las derivadas segundas de las coordenadas radial y temporal son tales que impiden que estas funciones sean singulares, para después proceder a analizar los diversos tipos de geodésicas y ver que la coordenada acimutal tampoco puede ser singular.

Las ecuaciones para el tiempo y la coordenada radial adoptan la siguiente forma tras la sustitución de las derivadas de las coordenadas cíclicas:

$$\begin{aligned}
& \ddot{t} + 2a \tanh(at) (\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2) + 6a \tanh(3a\rho) \dot{t} \dot{\rho} + \\
& + 18a^3 K^2 \tanh(at) \cosh^{-8}(at) \sinh^{-2}(3a\rho) \cosh^{-4/3}(3a\rho) - \\
& - aL^2 \cosh^{-3}(at) \sinh(at) \cosh^{-4/3}(3a\rho) = 0
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\rho} + 3a \tanh(3a\rho) (\dot{t}^2 + \dot{\rho}^2) + 4a \tanh(at) \dot{t} \dot{\rho} - \\
& - 9a^3 K^2 \cosh^{-8}(at) \sinh^{-3}(3a\rho) \cosh^{-1/3}(3a\rho) [3 - \tanh^2(3a\rho)] \\
& + aL^2 \cosh^{-2}(at) \sinh(3a\rho) \cosh^{-7/3}(3a\rho) = 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Estudiaremos a continuación los puntos conflictivos de estas ecuaciones:

1. Radio grande y creciente: A la vista de la ecuación (6.15), la derivada segunda de la coordenada radial es negativa para tiempos positivos.

La concavidad de la curva impide que ρ se vuelva singular. No consideramos los tiempos negativos, pues si $\dot{\rho}$ pudiera crecer fuertemente cuando $t < 0$, también \dot{t} crecería, de acuerdo con la ligadura (6.11) y llegaríamos a la región de tiempos positivos antes de que la coordenada divergiera.

2. Radio pequeño y decreciente: En la ecuación (6.15) el término en L tiende a cero para radios pequeños y el término cuadrático en las derivadas es dominado por el bilineal, para tiempos positivos. En consecuencia para ρ decreciente $\ddot{\rho}$ es positiva, concavidad hacia arriba, y la curva $\rho(\tau)$ no puede ser singular en tiempo propio finito. El razonamiento del caso anterior para tiempos negativos es válido otra vez.
3. Tiempo grande: Para grandes valores de t , esta función tiene derivada segunda negativa, como se observa por inspección de la ecuación (6.14). El término bilineal en las derivadas no es relevante, comparado con el cuadrático, si el radio decrece.

Queda por ver que las geodésicas con momento angular no nulo no pueden acceder al eje $\rho = 0$ y provocar que la velocidad angular sea singular. Para ello haremos un estudio progresivo de los diferentes tipos de geodésicas causales, que también será útil en secciones sucesivas:

1. Geodésicas en la congruencia del fluido: Como las coordenadas están adaptadas al movimiento del fluido, esta congruencia viene dada por la condición:

$$\dot{\rho} = \dot{\phi} = \dot{z} = 0 \quad (6.16)$$

Las únicas geodésicas compatibles con esta condición se hallan sobre el eje $\rho = 0$ y la única ecuación a resolver es:

$$\dot{t} = \cosh^{-2}(at) \leq 1 \quad (6.17)$$

Claramente estas geodésicas son completas al estar acotado el campo que las determina.

2. Geodésicas a lo largo del eje: Quedan definidas por la siguientes relaciones:

$$\rho = \dot{\phi} = 0 \quad (6.18)$$

$$\dot{z} = L \cosh^2(at) \quad (6.19)$$

$$\dot{t} = \cosh^{-2}(at) [L^2 \cosh^2(at) + \delta]^{1/2} \leq (L^2 + \delta)^{1/2} \quad (6.20)$$

La derivada del tiempo es acotada y, por tanto, puede extenderse a valores arbitrarios del parámetro afín. Al ser $t(\tau)$ bien definida, z no tiene problemas.

3. Geodésicas luz radiales: El sistema se puede reducir a uno de primer orden tras una integración en la que se introduce una constante h :

$$\dot{\phi} = \dot{z} = \delta = 0 \quad (6.21)$$

$$\dot{t} = |\dot{\rho}| \quad (6.22)$$

$$\dot{\rho} = h \cosh^{-4}(at) \cosh^{-2}(3a\rho) \quad (6.23)$$

El valor absoluto de $\dot{\rho}$ está acotado por $|h|$, de donde se infiere que estas geodésicas son completas. Tras cruzar el eje en la dirección ϕ , emergen en la dirección $\phi + \pi$ sin encontrar ninguna singularidad.

4. Geodésicas tiempo radiales: El sistema se reduce a uno de primer orden mediante la introducción de un parámetro v :

$$\dot{t} = \cosh(v) A(\rho, t) \quad (6.24)$$

$$\dot{\rho} = \sinh(v) A(\rho, t) \quad (6.25)$$

$$\dot{v} = B(\rho, t, v) A(\rho, t) \quad (6.26)$$

Hay que tener en cuenta que el parámetro v no puede hacerse infinito para un parámetro afín finito, ya que entonces las derivadas de las coordenadas temporal y radial serían de igual módulo, lo que impediría el cumplimiento de la ligadura (6.11) con $\delta = 1$, salvo que a su vez t y ρ divergieran, lo cual hemos visto anteriormente que no está permitido por argumentos de concavidad. Las nuevas funciones que hemos introducido tienen la siguiente forma:

$$A(\rho, t) = \cosh^{-2}(at) \cosh^{-1}(3a\rho) \quad (6.27)$$

$$B(\rho, t, v) = -a [3 \tanh(3a\rho) \cosh(v) + 2 \tanh(at) \sinh(v)] \quad (6.28)$$

Por tanto, \dot{t} y $\dot{\rho}$ están acotadas por funciones hiperbólicas de v , que a su vez es una función regular del parámetro afín. Por tanto, estas geodésicas son completas.

5. Geodésicas luz sin momento angular: De nuevo parametrizamos en función de v para obtener un sistema de primer orden:

$$\dot{\phi} = \delta = 0 \quad (6.29)$$

$$\dot{t} = \cosh(v) E(\rho, t) \quad (6.30)$$

$$\dot{\rho} = \sinh(v) E(\rho, t) \quad (6.31)$$

$$\dot{v} = E(\rho, t) F(\rho, t, v) \quad (6.32)$$

donde las funciones $E(\rho, t)$ y $F(\rho, t, v)$ se definen a continuación:

$$E(\rho, t) = |L| \cosh^{-1}(at) \cosh^{-2/3}(3a\rho) \quad (6.33)$$

$$F(\rho, t, v) = -a [4 \tanh(3a\rho) \cosh(v) + 3 \tanh(at) \sinh(v)] \quad (6.34)$$

De nuevo el parámetro v no puede hacerse infinito en un tiempo propio finito sin violar la ligadura (6.11) con $\delta = 0$ y $L \neq 0$. Un razonamiento análogo al del caso anterior es aplicable aquí para concluir que estas geodésicas son completas.

6. Geodésicas luz en planos $z = \text{const.}$: El sistema equivalente parametrizado por v viene dado por:

$$\dot{z} = \delta = 0 \quad (6.35)$$

$$\dot{t} = \cosh(v) M(\rho, t) \quad (6.36)$$

$$\dot{\rho} = \sinh(v) M(\rho, t) \quad (6.37)$$

$$\dot{v} = M(\rho, t) D(\rho, v) \quad (6.38)$$

Las nuevas funciones introducidas vienen descritas por:

$$M(\rho, t) = 3 |a K| \cosh^{-4}(at) \cosh^{-2/3}(3a\rho) \sinh^{-1}(3a\rho) \quad (6.39)$$

$$D(\rho, v) = a \cosh(v) [3 \tanh^{-1}(3a\rho) - 4 \tanh(3a\rho)]. \quad (6.40)$$

Podemos integrar una de las ecuaciones de la órbita dividiendo $\dot{\rho}$ por \dot{v} :

$$\cosh(v) = \alpha^{-1} \sinh(3a\rho) \cosh^{-4/3}(3a\rho) \quad (6.41)$$

siendo α una constante positiva. Como el lado izquierdo de la expresión está acotado inferiormente por la unidad, el movimiento geodésico está restringido al intervalo entre las soluciones ρ_+ y ρ_- de la ecuación:

$$\sinh(3a\rho_{\pm}) \cosh^{-4/3}(3a\rho_{\pm}) = \alpha \quad (6.42)$$

De este modo, las geodésicas con momento angular no nulo no pueden alcanzar el eje, $|v|$ está acotado y las geodésicas son completas.

7. Geodésicas causales generales: Parametrizamos las ecuaciones (6.11), (6.14) y (6.15) por medio, de nuevo, de v , que, igual que antes, habrá de ser finito:

$$\dot{t} = (3|aK|)^{-1} M(\rho, t) G(r, t) \cosh(v) \quad (6.43)$$

$$\dot{\rho} = (3|aK|)^{-1} M(\rho, t) G(\rho, t) \sinh(v) \quad (6.44)$$

$$\dot{v} = (3|aK|)^{-1} M(\rho, t) H(\rho, t) G^{-1}(\rho, t) \quad (6.45)$$

utilizando, para ello, las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} G(\rho, t) = & [\cosh^4(at) \sinh^2(3a\rho) \cosh^{-2/3}(3a\rho)(1 - \delta) + \\ & + 9a^2 K^2 + L^2 \cosh^6(at) \sinh^2(3a\rho)]^{1/2} \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} H(\rho, t, v) = & -a\{\sinh(v) \tanh(at) \sinh^2(3a\rho) [3L^2 \cosh^6(at) + \\ & + 2 \cosh^4(at) \cosh^{-2/3}(3a\rho) (1 - \delta)] + \\ & + \cosh(v) \tanh(3a\rho) [4L^2 \cosh^6(at) \sinh^2(3a\rho) + \\ & + 3 \cosh^4(at) \sinh^2(3a\rho) \cosh^{-2/3}(3a\rho) (1 - \delta)] + \\ & + 9a^2 K^2 \cosh(v) [4 \tanh(3a\rho) - \\ & - 3 \tanh^{-1}(3a\rho)]\} \end{aligned} \quad (6.47)$$

La única región conflictiva es la vecindad del eje, pero en este caso el término dominante es el del párrafo anterior. En consecuencia, las geodésicas con velocidad angular distinta de cero no pueden alcanzar el eje y $\dot{\phi}$ no diverge. El término en $\dot{\phi}^2$ en (6.13) induce un comportamiento centrífugo. En consecuencia, todas las geodésicas causales son completas [58].

6.2.2 Ausencia de singularidades

De lo anterior se deduce que cada geodésica luz maximal intercepta todas las hipersuperficies de tiempo constante. De acuerdo con [60], esto implica que toda curva causal corta a las citadas hipersuperficies una sola vez y, por tanto, $t = \text{const.}$ es una familia de superficies de Cauchy globales.

En consecuencia, dado que el gradiente de t es siempre de género tiempo, toda curva causal puede extenderse hasta valores arbitrarios de su parámetro afín generalizado [57], ya que corta a todas las superficies de Cauchy. Esto implica que la variedad no es sólo g -completa, sino b -completa y esta es la caracterización que hemos utilizado para la ausencia de singularidades.

6.3 Propiedades de la solución

6.3.1 Propiedades del contenido material

Una vez comprobada la completitud geodésica de la solución, pasamos a analizar otras propiedades del espaciotiempo, comenzando por su contenido material. Estas propiedades serán de utilidad a la hora de corroborar la consistencia de la solución con los teoremas sobre singularidades.

1. Condición fuerte sobre la energía: Refleja el requerimiento de que el contenido material del espaciotiempo permita la focalización de geodésicas causales. Se establece con la siguiente condición:

$$R_{\alpha\beta} W^\alpha W^\beta \geq 0 \quad \forall W \text{ temporal} \quad (6.48)$$

Por continuidad, si se verifica para vectores de género tiempo, se verifica también para vectores de género luz.

La ecuación de estado de radiación incoherente satisface esta condición [57], pues la presión es positiva.

2. Condición genérica: Manifiesta que existe materia en todo punto de la variedad. Su formulación matemática exacta es [57]:

$$K^\alpha K^\beta K_{[\gamma} R_{\delta]\alpha\beta[\epsilon} K_{\zeta]} \neq 0 \quad \forall W \text{ causal} \quad (6.49)$$

De acuerdo con [59] esta condición se satisface si se verifica esta otra más sencilla:

$$R_{\alpha\beta} K^\alpha K^\beta \neq 0 \quad \forall K \text{ temporal} \quad (6.50)$$

Dado que la densidad (6.4) no se anula en ninguna parte de la variedad, esta condición se verifica en esta cosmología.

6.3.2 Propiedades causales de la solución

En [57] y [59] se establece una jerarquía de propiedades globales sobre la estructura causal del espaciotiempo que abarcan desde, la más sencilla, la no existencia de curvas temporales cerradas (condición sobre la cronología) hasta la hiperbolicidad global:

1. Estabilidad causal: Supone que en un entorno de la variedad semiriemanniana, referido a la topología abierta C^0 , no existen espaciotiempos con curvas causales cerradas. Se verifica [57] si existe un tiempo cósmico, es decir, una función cuyo gradiente siempre es temporal.

En la solución que estamos considerando es claro que t es un tiempo cósmico y, por tanto, estamos estudiando un espaciotiempo causalmente estable. En consecuencia, se verifican las condiciones más simples, como aquellas sobre la cronología y la causalidad.

2. Hiperbolicidad global: Hemos visto en la sección anterior que las hipersuperficies de Cauchy son superficies de Cauchy globales. Por tanto, la solución es globalmente hiperbólica: Las soluciones de la ecuación de ondas tienen un buen comportamiento en la variedad [57].

También se verifica una condición de menor rango en la jerarquía como es la simplicidad causal, es decir, para un compacto K su futuro causal, $J^+(K)$, es cerrado y su frontera coincide con el futuro luz, $E^+(K)$.

6.4 Teoremas sobre singularidades

6.4.1 Teorema de Penrose

En esta sección abordaremos la compatibilidad de la solución de Senovilla con dos de los teoremas sobre existencia de singularidades, en particular, un

teorema de Penrose [61] y otro de Hawking y Penrose [62], recogidos en el libro [57] como teoremas 1 y 2.

Comenzaremos el estudio por el teorema de Penrose:

Una variedad espaciotemporal (\mathcal{M}, g) no puede ser completa para las geodésicas de género luz si:

1. $R_{\alpha\beta} K^\alpha K^\beta \geq 0 \quad \forall K$ de género luz.
2. Existe una superficie de Cauchy no compacta en \mathcal{M} .
3. Existe una superficie atrapada cerrada en \mathcal{M} (una superficie compacta espacial para la cual las trazas de sus dos formas fundamentales basadas en vectores normales de género luz tienen el mismo signo).

Este teorema está más bien enfocado al estudio del colapso gravitacional que a la cosmología; no obstante, veremos que argumento falla a la hora de aplicarlo a la solución [22].

Las dos primeras premisas del teorema se satisfacen para la solución, como hemos visto en la sección anterior. Por tanto, ya que la solución es completa, no deberá existir ninguna superficie cerrada atrapada.

Supongamos que existe una: Por ser compacta, tendrá un punto, p , en el que la coordenada radial se hace máxima. En este punto, la normal a la superficie será una combinación lineal de los vectores ∂_ρ , ∂_t . Si calculamos las trazas de las dos formas fundamentales nulas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \chi_{\mp}^\mu{}_\mu &= 2^{-1/2} a \cosh^{-2}(at) \sinh^{-1}(3a\rho) \times \\ &\times [-\tanh(at) \tanh(3a\rho) \mp 3 \pm 2 \tanh^2(3a\rho)] - \\ &- g^{zz} n_{z,z}^\mp(p) - g^{\phi\phi} n_{\phi,\phi}^\mp(p) \end{aligned} \quad (6.51)$$

donde hemos utilizado la siguiente expresión para la segunda forma fundamental en términos de los vectores de género luz n^+ , saliente, y n^- , entrante, ortogonales a la superficie y el proyector sobre el espacio tangente a la superficie e_μ^α :

$$\chi_{\pm}{}_{\mu\nu} = -n_{\alpha\beta}^\pm e_\mu^\alpha e_\nu^\beta \quad (6.52)$$

donde los vectores normales satisfacen la siguiente normalización:

$$n^+ \cdot n^- = -1 \quad (6.53)$$

Las derivadas $n_{z,z}(p)$ y $n_{\phi,\phi}(p)$ son positivas (negativas) para normales exteriores (interiores) en p . Por tanto:

$$\begin{aligned} \chi_{-\mu}^{\mu} &\leq -2^{-1/2}a \cosh^{-2}(at) \sinh^{-1}(3a\rho) \times \\ &\times [1 + \tanh(at) \tanh(3a\rho)] < 0 \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} \chi_{+\mu}^{\mu} &\geq 2^{-1/2}a \cosh^{-2}(at) \sinh^{-1}(3a\rho) \times \\ &\times [1 - \tanh(at) \tanh(3a\rho)] > 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Las trazas de las segundas formas fundamentales son de signo opuesto, de donde se colige que no existen superficies atrapadas cerradas: Las geodésicas entrantes convergen, mientras que las geodésicas salientes divergen.

Con lo cual queda visto que la última premisa del teorema de Penrose no se satisface.

6.4.2 Teorema de Hawking y Penrose

Una variedad espaciotemporal (\mathcal{M}, g) no puede ser completa para las geodésicas causales si:

1. $R_{\alpha\beta} K^{\alpha} K^{\beta} \geq 0 \quad \forall K$ causal.
2. Se satisface la condición genérica.
3. Se verifica la condición de cronología (no hay curvas temporales cerradas).
4. Existe al menos uno de los siguientes:
 - (a) Una superficie atrapada cerrada.
 - (b) Un conjunto ácrono (sus sucesos no pueden unirse mediante curvas temporales) compacto sin borde.
 - (c) Un punto p tal que la divergencia de las geodésicas nulas hacia el pasado (futuro) desde p es negativa.

Este es uno de los teoremas más potentes en el estudio de singularidades. Veremos que es posible determinar qué condiciones fallan a la hora de aplicarlo a la solución [22].

Sabemos por las secciones anteriores que nuestra variedad satisface las tres primeras premisas. En consecuencia es la cuarta la que no ha de verificarse. Como no existen superficies atrapadas cerradas, queda por demostrar que las otras dos opciones no son viables:

Por una parte demostraremos que no puede existir un conjunto ácrono compacto sin borde. Recordemos que un suceso pertenece al borde de \mathcal{S} si existen sucesos en su pasado y su futuro que pueden unirse mediante curvas temporales que no corten a \mathcal{S} .

Escojamos un conjunto ácrono \mathcal{S} dentro de la variedad y un punto q sobre él. Veremos que es imposible que sea a la vez compacto y sin borde:

Para ello nos serviremos de las geodésicas radiales descritas en el apartado 6.2.1 y de la congruencia de líneas de fluido: Usando las geodésicas radiales, salientes y entrantes, podemos escoger sucesos, $q_- \in I^-(q)$, pertenecientes al pasado temporal de q y sucesos, $q_+ \in I^+(q)$, pertenecientes a su futuro temporal de modo que $\rho(q_-) = \rho(q_+) > \rho(q)$.

Dado que la congruencia del fluido es completa, podemos unir q_- y q_+ mediante una línea de universo del fluido. Si el conjunto ácrono no tiene borde, esta línea deberá cortar a \mathcal{S} en un punto \tilde{q} cuya coordenada radial es $\rho(\tilde{q}) = \rho(q_-) = \rho(q_+) > \rho(q)$.

En consecuencia, la coordenada ρ no puede estar acotada en un conjunto ácrono sin borde, hecho este que contradice la exigencia de que \mathcal{S} sea compacto. Por tanto, hemos descartado la existencia de un conjunto con estas características.

Finalmente, la existencia de un punto p tal que la expansión de las geodésicas nulas hacia el pasado o hacia el futuro sea negativa queda descartada debido a la existencia de geodésicas luz radiales salientes (entrantes) orientadas hacia el futuro (pasado) por cada suceso de la variedad, las cuales claramente divergen. También se puede ver a raíz de la coexistencia de geodésicas de recorrido acotado, como las geodésicas luz en cada plano $z = \text{const.}$, con las geodésicas radiales, que no están acotadas. Claramente estas familias no pueden converger.

Los condiciones exigidas por este teorema son más exigentes que las que se incluyen en los teoremas debidos a Hawking incluidos en [57]. Por tanto, concluimos aquí la revisión de los teoremas clásicos sobre singularidades.

6.5 Consecuencias

Como resultado de este análisis se concluye que las condiciones sobre la causalidad y la energía no son determinantes por sí solas para afirmar la existencia de singularidades.

La ausencia de singularidades no es exclusiva de la ecuación de estado de radiación incoherente, ya que posteriormente esta solución se ha generalizado [63], encontrándose otras soluciones g -completas que no verifican dicha ecuación, aunque todas tengan simetría cilíndrica. No obstante, no todas las soluciones con esta simetría son no-singulares, ya que dentro de la misma familia hay alguna que es g -incompleta. Más detalles sobre el tema pueden encontrarse en [64].

En cualquier caso, está claro que condiciones iniciales del tipo existencia de un conjunto ácrono sin borde o de una superficie atrapada son ineludibles para la aparición de singularidades dentro del marco de los teoremas descritos.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta memoria dedicada a la interpretación de soluciones de las ecuaciones de Einstein se han abordado las siguientes cuestiones:

- Construcción de un formalismo exterior para la descripción de campos electromagnéticos con simetrías estacionaria y axial dentro de la teoría de la relatividad general: Esta formulación ha constituido el punto de partida para la mayoría de los resultados incluidos en esta memoria, debido a la gran libertad remanente a la hora de efectuar simplificaciones.
- Un nuevo enfoque para abordar la generalización de la teoría del potencial clásica a la relatividad general: Haciendo uso del formalismo exterior se ha conseguido interpretar las discontinuidades de los potenciales de Ernst como indicadores de la presencia de fuentes bidimensionales para los campos. También ha permitido construir densidades para las magnitudes físicas de dichas fuentes. Los resultados se han aplicado a varias soluciones exactas, entre ellas la solución de Kerr, lo cual ha permitido obtener una versión regularizada de la densidad de momento angular de su fuente mínima bidimensional. También se ha tratado la invariancia del formalismo bajo la transformación algebraica de Bonnor.
- La libertad presente en el formalismo exterior ha sido empleada también para presentar las ecuaciones de Einstein en un referencial menos usual y obtener de este modo extensiones de familias de soluciones conocidas y una familia de nuevas soluciones. También ha servido para mostrar la

equivalencia de las soluciones que incluyen campos electromagnéticos parcialmente degenerados.

- Se ha obtenido la solución general aproximada hasta orden séptimo en una coordenada radial para el vacío estacionario axisimétrico asintóticamente plano dotado de un plano ecuatorial de simetría. Con esta métrica se han podido calcular las correcciones multipolares a la precesión del perihelio y de la línea de nodos de una partícula prueba y se han observado regularidades en las contribuciones de los distintos momentos.
- Finalmente se ha mostrado la ausencia de singularidades de la solución cosmológica de Senovilla y las razones de su consistencia con los teoremas sobre completitud geodésica, dando como resultado la influencia determinante de las condiciones de frontera sobre la aparición de singularidades.

Como temas abiertos a la futura investigación se pueden citar la extensión de la teoría del potencial a los casos no cubiertos en esta memoria y su aplicación a otras situaciones de interés físico, el análisis del efecto de la excentricidad en la precesión de la línea de nodos de una partícula prueba y la búsqueda de soluciones cosmológicas sin singularidades que no posean simetría cilíndrica.

Apéndice A

Densidad magnética clásica

En este apéndice se incluye una construcción para obtener densidades clásicas de momento dipolar a partir de las discontinuidades del potencial escalar magnético. El resultado es consistente con la teoría del potencial clásica [36] y permite construir fuentes para el campo magnético estático en la forma de hojas de dipolos magnéticos.

Para ello recordemos la doble descripción en términos de operadores diferenciales que se puede hacer del campo magnetostático en el vacío:

$$\mathbf{B} = -\nabla V = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.1})$$

Como es sabido la descripción del campo como rotacional del potencial vector \mathbf{A} es completamente general debido a la exigencia de que el campo magnético sea solenoidal. Por contra, el campo sólo puede expresarse como gradiente de un potencial escalar fuera de las fuentes materiales y si es estático. Si la topología de la fuente no es trivial, como sucede, por ejemplo, cuando tenemos anillos de corriente, el potencial escalar no es univaluado.

Dos fórmulas del cálculo integral que serán útiles para nuestros fines son las siguientes:

$$\int_{\Omega} d^3x \nabla V = \int_{\partial\Omega} dS \mathbf{n} V \quad (\text{A.2})$$

$$\int_{\Omega} d^3x \nabla \times \mathbf{A} = \int_{\partial\Omega} dS \mathbf{n} \times \mathbf{A} \quad (\text{A.3})$$

Estas expresiones relacionan integrales de volumen en recintos Ω con integrales de superficie sobre la frontera. Es de resaltar que, pese a la apariencia

formal de estas fórmulas con las expresiones derivadas del teorema de Stokes, es necesario utilizar las identidades de Green para deducirlas (que involucran la métrica) y, por tanto, dependen fuertemente de que el espacio sea plano, con lo cual su generalización a espacios curvos no es inmediata.

Supongamos que el campo magnético se comporta a grandes distancias como el producido por un dipolo magnético M en la dirección z . Esto se traduce para los potenciales en la siguiente forma asintótica:

$$V = \frac{M \cos \theta}{r^2} + o(r^{-3}) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{A} = \frac{M \sin \theta}{r^2} \mathbf{u}_\phi + o(r^{-3}) \quad (\text{A.5})$$

Procedamos a integrar sobre todo el espacio la diferencia entre ambas expresiones para el campo magnético:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\nabla \times \mathbf{A} + \nabla V) = \int_{\partial \mathbb{R}^3} dS (\mathbf{n} \times \mathbf{A} + \mathbf{n}V) \quad (\text{A.6})$$

Si suponemos que el potencial escalar es discontinuo a través de una superficie cerrada S , habremos de descomponer la integral en dos partes (sobre el espacio interior y exterior a S) y la frontera del espacio habrá de tomarse como la esfera de radio infinito $S^2(\infty)$ y las dos caras orientadas, S^+ (exterior) y S^- (interior), de la superficie:

$$\partial \mathbb{R}^3 = S^2(\infty) - S^+ + S^- \quad (\text{A.7})$$

La integral en el infinito se calcula trivialmente haciendo uso de los comportamientos asintóticos. Si denotamos el salto en el potencial como $[V] = V^+ - V^-$, el resultado se puede expresar como:

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_S dS [V] \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_z \quad (\text{A.8})$$

en función del salto del potencial y la proyección de la normal unitaria a la superficie, \mathbf{n} , en la dirección z .

Con lo cual podemos interpretar el integrando como densidad superficial de momento magnético de la fuente:

$$\sigma_M = \frac{1}{4\pi} [V] \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_z \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Análisis de Z_{rot} de Kerr

B.1 Introducción

En el capítulo 3 se analizaban las discontinuidades del potencial de “twist” de la solución de Kerr, llegándose a la conclusión de que la función que era preciso introducir en la expresión de la densidad de momento angular del disco $r = 0$ era la siguiente:

$$Z_{rot} = (r - 3m) \cos \theta + \frac{2a^2 m \cos^3 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{B.1})$$

En este apéndice estudiaremos el comportamiento de esta función y mostraremos la forma que presentan las superficies de Z_{rot} constante. Para ello, será conveniente reducir el número de parámetros, dividiendo por m para trabajar con magnitudes adimensionales:

$$\tilde{Z}_{rot} = (\tilde{r} - 3) \cos \theta + \frac{2\tilde{a}^2 \cos^3 \theta}{\tilde{r}^2 + \tilde{a}^2 \cos^2 \theta} \quad (\text{B.2})$$

donde la tilde denota división por m .

En lo sucesivo, para aligerar la notación, se obviará la tilde y el subíndice *rot*.

Para valores extremos de a la función Z presenta el siguiente comportamiento:

$$Z \rightarrow (r - 3) \cos \theta \quad a \rightarrow 0 \quad (\text{B.3})$$

$$Z \rightarrow (r - 1) \cos \theta \quad a \rightarrow \infty \quad (\text{B.4})$$

Figura B.1: Gráfica de $Z(r, 0)$ para valores de a iguales a $1/2, 1, 2$.

En la figura B.1 se representan las curvas para valores de a iguales a un medio, uno y dos en la dirección $\theta = 0$, observándose la tendencia anterior.

Es de reseñar que, para determinados valores de θ y a , las curvas $Z(r)$ no son monótonas y, por tanto, las superficies de Z fijo podrán cortar a los conos de θ constante en dos y hasta tres ocasiones.

Para analizar dicho comportamiento estudiaremos la aparición de extremos relativos para las curvas $Z(r, \theta_0, a_0)$. La condición de extremo $Z_r(r_{\pm}) = 0$ nos proporciona la relación entre los valores r_{\pm} para los cuales existe un máximo o un mínimo relativo y los correspondientes valores b_{\pm} del parámetro $b = a \cos \theta$:

$$b_{\pm}^2 = r_{\pm} \{2 - r_{\pm} \pm 2\sqrt{1 - r_{\pm}}\} \quad (\text{B.5})$$

Como primera consecuencia se obtiene que para que aparezcan extremos relativos el radio debe estar comprendido entre cero y uno:

Figura B.2: Gráfica de $Z(r, \theta_0)$ para valores de θ_0 iguales a $0, \pi/4, \pi/3$ y a igual a 1.

Figura B.3: Región del plano $r - b^2$ en la cual la función Z presenta extremos.

$$r_{\pm} \in [0, 1] \quad (\text{B.6})$$

y, por tanto, estamos hablando de regiones comprendidas en el interior del horizonte de sucesos, cuando este existe.

El caso $\theta = \pi/2$, correspondiente a $Z = 0$ queda excluido del tratamiento general.

Podemos obtener también el valor crítico del parámetro b para el cual los extremos de la curva $Z(r)$ colapsan en un punto de inflexión con tangente horizontal: La condición de punto de inflexión, $Z_{rr} = 0$ se traduce, a parte de en el caso $b = 0$, en:

$$b_{in}^2 = 3r_{in}^2 \quad (\text{B.7})$$

Esta expresión igualada a la de b_+ nos proporciona el siguiente valor crítico del parámetro, por encima del cual no existen extremos relativos:

$$b_c^2 = \frac{27}{16} \quad (\text{B.8})$$

En consecuencia sólo las superficies de Z constante de módulo inferior a uno pueden presentar varias hojas, en las direcciones comprendidas a lo sumo entre las colatitudes:

$$\begin{array}{l} \arccos \sqrt{\frac{27}{16a^2}} < \theta < \arccos -\sqrt{\frac{27}{16a^2}} & a^2 > \frac{27}{16} \\ 0 < \theta < \pi & a^2 < \frac{27}{16} \end{array} \quad (\text{B.9})$$

En estas condiciones podrá haber hojas adicionales compactas en el semiespacio $\theta > \pi/2$, además de la hoja situada en el semiespacio $\theta < \pi/2$, para las superficies de Z constante positiva. Por la simetría de la función Z un razonamiento análogo es válido para Z negativa.

En la figura B.4 se muestra la evolución de la sección de estas hojas adicionales para un valor de $a = 5/4$.

La componente no compacta de una superficie $Z = \text{const.}$ es presentada en la figura B.5.

Comenzando por la superficie múltiple de mayor sencillez, representamos $Z = 0$ en la figura B.6. Aparte del plano $\theta = \pi/2$, consta de una superficie cerrada que lo corta y que, como veremos, engloba la totalidad de hojas compactas del resto de superficies $Z = \text{const.}$

La posición relativa de la superficie $Z = 0$ respecto de las componentes no compactas de otras superficies se muestra en la figura B.7.

Figura B.4: Proyección sobre un plano $\phi = \phi_0$ de las superficies Z constante en coordenadas de Boyer-Lindquist.

Figura B.5: Componente no compacta de la superficie $Z = 1/2$.

Figura B.6: Sección de la superficie $Z = 0$.

Figura B.7: Sección de la superficie $Z = 0$ y la componente no compacta de $Z = 1/2$ y $Z = -1/2$.

A medida que Z va creciendo, la superficie cerrada en $Z = 0$ se divide en dos (una para Z positiva y otra para Z negativa), que van disminuyendo de tamaño conforme Z aumenta. En la figura B.8 podemos ver la componente compacta para $Z = 1/2$ y en la figura B.9, la superficie $Z = 0$ englobando las componentes compactas de $Z = 1/2$ y $Z = -1/2$.

Como ya se anticipaba en la expresión analítica de Z , al crecer Z la componente compacta acaba por subdividirse en dos (figura B.10). En la figura B.11 se puede observar la posición relativa de las componentes compactas de las superficies $Z = \pm 1/2$ y $Z = \pm 78/100$.

Finalmente, al crecer Z , las hojas compactas desaparecen y sólo resta la hoja difeomorfa a un plano. En la figura B.12 se muestra una superposición de componentes compactas en el interior de $Z = 0$ y en la figura B.13, se incluye también un detalle de dos hojas no compactas.

Figura B.8: Detalle de la componente compacta de la superficie $Z = 1/2$.

Figura B.9: Detalle de la superficie $Z = 0$ y las componentes compactas de $Z = 1/2$ y $Z = -1/2$.

Figura B.10: Detalle de las componentes compactas de $Z = 78/100$.

Figura B.11: Detalle de las componentes compactas de $Z = \pm 78/100$ y $Z = \pm 1/2$.

Figura B.12: Detalle de las hojas de las superficies $Z = \text{const.}$ en el interior de $Z = 0$.

Figura B.13: Detalle de las hojas de las superficies $Z = const.$

Apéndice C

Métrica aproximada multipolar

C.1 Funciones métricas

C.1.1 Potencial de Ernst

A continuación figuran los primeros términos de la expansión del potencial de Ernst más general para una métrica estacionaria, axisimétrica, asintóticamente plana y dotada de un plano ecuatorial de simetría:

$$\xi = \sum_{n=1}^7 \xi_n r^{-n} + O(r^{-8}) \quad (\text{C.1})$$

$$\xi_1 = m_0 \quad (\text{C.2})$$

$$\xi_2 = m_1 p_1(\cos\theta) \quad (\text{C.3})$$

$$\xi_3 = m_2 p_2(\cos\theta) - \frac{m_0^3}{3} \quad (\text{C.4})$$

$$\xi_4 = m_3 p_3(\cos\theta) - \frac{3 m_0^2 m_1 \cos\theta}{5} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}\xi_5 &= m_4 p_4(\cos \theta) + \left(\frac{m_0 m_1^2}{7} - \frac{3 m_0^2 m_2}{2} \right) \cos^2 \theta + \\ &+ \frac{2 m_0^5}{15} + \frac{m_0^2 m_2}{2} - \frac{4 m_0 m_1^2}{35}\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned}\xi_6 &= m_5 p_5(\cos \theta) + \left(\frac{m_1^3}{3} - m_0 m_1 m_2 - \frac{35 m_0^2 m_3}{18} \right) \cos^3 \theta + \\ &+ \left(\frac{m_0 m_1 m_2}{7} + \frac{7 m_0^2 m_3}{6} + \frac{34 m_0^4 m_1}{105} \right) \cos \theta\end{aligned}\quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned}\xi_7 &= m_6 p_6(\cos \theta) + \left(\frac{5 m_0 m_1 m_3}{11} - \frac{35 m_0^2 m_4}{8} + \frac{15 m_2 m_1^2}{22} - \right. \\ &- \left. \frac{9 m_0 m_2^2}{4} \right) \cos^4 \theta + \left(\frac{15 m_0^2 m_4}{4} - \frac{8 m_0^3 m_1^2}{105} + m_0^4 m_2 - \right. \\ &- \left. \frac{9 m_0 m_1 m_3}{11} - \frac{5 m_2 m_1^2}{22} + \frac{3 m_0 m_2^2}{2} \right) \cos^2 \theta - \frac{m_0 m_2^2}{4} + \\ &+ \frac{8 m_2 m_1^2}{231} + \frac{2 m_0 m_1 m_3}{11} - \frac{m_0^4 m_2}{3} + \frac{4 m_0^3 m_1^2}{45} - \frac{17 m_0^7}{315} - \\ &- \frac{3 m_0^2 m_4}{8}\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

donde $p_n(x)$ simboliza el polinomio de Legendre de orden n y las constantes de integración m_n son reales si n es par y negativas en caso contrario.

C.1.2 Métrica

En este apartado se consigna la expresión aproximada de la métrica calculada a partir del potencial de Ernst del apartado anterior:

$$ds^2 = -f (dt^2 - A d\phi)^2 + \frac{1}{f} \{ \rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) \} \quad (\text{C.9})$$

$$f = 1 + \sum_{n=1}^7 f_n r^{-n} + O(r^{-8}) \quad (\text{C.10})$$

$$f_1 = -2 m_0 \quad (\text{C.11})$$

$$f_2 = 2 m_0^2 \quad (\text{C.12})$$

$$f_3 = -3 m_2 \cos^2 \theta - \frac{4 m_0^3}{3} + m_2 \quad (\text{C.13})$$

$$f_4 = (6 m_0 m_2 + 2 m_1^2) \cos^2 \theta - 2 m_0 m_2 + \frac{2 m_0^4}{3} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} f_5 = & \left(\frac{15 m_4}{2} - 6 m_0^2 m_2 - \frac{44 m_0 m_1^2}{7} \right) \cos^2 \theta - \frac{35 m_4 \cos^4 \theta}{4} + \\ & + \frac{8 m_0 m_1^2}{35} + 2 m_0^2 m_2 - \frac{3 m_4}{4} - \frac{4 m_0^5}{15} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} f_6 = & \left(10 m_1 m_3 + \frac{35 m_0 m_4}{2} + \frac{9 m_2^2}{2} \right) \cos^4 \theta + (-6 m_1 m_3 - \\ & - 15 m_0 m_4 + 4 m_2 m_0^3 + \frac{356 m_0^2 m_1^2}{35} - 3 m_2^2) \cos^2 \theta - \\ & - \frac{16 m_0^2 m_1^2}{35} + \frac{m_2^2}{2} - \frac{4 m_2 m_0^3}{3} + \frac{3 m_0 m_4}{2} + \frac{4 m_0^6}{45} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} f_7 = & \left(-\frac{114 m_2 m_1^2}{11} - 9 m_0 m_2^2 - \frac{35 m_0^2 m_4}{2} + \frac{315 m_6}{8} - \right. \\ & \left. - \frac{340 m_0 m_1 m_3}{11} \right) \cos^4 \theta - \frac{231 m_6 \cos^6 \theta}{8} + (15 m_0^2 m_4 - \\ & - \frac{1208 m_0^3 m_1^2}{105} - 2 m_0^4 m_2 + \frac{38 m_2 m_1^2}{11} + 6 m_0 m_2^2 + \\ & + \frac{216 m_0 m_1 m_3}{11} - \frac{105 m_6}{8}) \cos^2 \theta - \frac{4 m_0 m_1 m_3}{11} + \frac{2 m_0^4 m_2}{3} - \\ & - \frac{3 m_0^2 m_4}{2} - m_0 m_2^2 - \frac{16 m_2 m_1^2}{231} + \frac{32 m_0^3 m_1^2}{63} + \frac{5 m_6}{8} - \\ & - \frac{8 m_0^7}{315} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$A = -i \sin^2 \theta \sum_{n=1}^6 A_n r^{-n} + O(r^{-7}) \quad (\text{C.18})$$

$$A_1 = -2 m_1 \quad (\text{C.19})$$

$$A_2 = -2 m_1 m_0 \quad (\text{C.20})$$

$$A_3 = -5 m_3 \cos^2 \theta + m_3 - \frac{8 m_0^2 m_1}{5} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} A_4 = & \left(\frac{3 m_1 m_2}{2} - \frac{15 m_0 m_3}{2} \right) \cos^2 \theta + \frac{m_1 m_2}{2} - \frac{16 m_1 m_0^3}{15} + \\ & + \frac{3 m_0 m_3}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} A_5 = & - \frac{63 m_5 \cos^4 \theta}{4} + \left(\frac{21 m_5}{2} - \frac{20 m_0^2 m_3}{3} \right) \cos^2 \theta + \\ & + \frac{4 m_0^2 m_3}{3} - \frac{64 m_0^4 m_1}{105} - \frac{3 m_5}{4} + \frac{8 m_0 m_1 m_2}{7} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$\begin{aligned} A_6 = & \left(\frac{35 m_1 m_4}{4} - \frac{5 m_2 m_3}{2} - \frac{105 m_0 m_5}{4} \right) \cos^4 \theta + (m_2 m_3 - \\ & - \frac{5 m_1 m_4}{2} + \frac{16 m_1^3 m_0}{21} - \frac{8 m_1 m_0^2 m_2}{5} - \frac{40 m_3 m_0^3}{9} + \\ & + \frac{35 m_0 m_5}{2}) \cos^2 \theta - \frac{m_3 m_2}{2} - \frac{32 m_1 m_0^5}{105} + \frac{8 m_1^3 m_0}{105} - \\ & - \frac{5 m_0 m_5}{4} + \frac{8 m_3 m_0^3}{9} + \frac{48 m_1 m_0^2 m_2}{35} - \frac{m_1 m_4}{4} \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

$$\gamma = \sum_{n=1}^4 \gamma_{2n} r^{-2n} + O(r^{-9}) \quad (\text{C.25})$$

$$\gamma_1 = -\frac{m_0^2 \sin^2 \theta}{2} \quad (\text{C.26})$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \left(\frac{15 m_0 m_2}{4} - \frac{9 m_1^2}{4} \right) \cos^4 \theta + \left(\frac{5 m_1^2}{2} - \frac{9 m_0 m_2}{2} \right) \cos^2 \theta + \\ &+ \frac{3 m_0 m_2}{4} - \frac{m_1^2}{4} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \left(\frac{75 m_2^2}{8} + \frac{105 m_0 m_4}{8} - \frac{35 m_3 m_1}{2} \right) \cos^6 \theta + \left(\frac{55 m_1 m_3}{2} - \right. \\ &- \left. \frac{117 m_2^2}{8} - \frac{175 m_0 m_4}{8} \right) \cos^4 \theta + \left(\frac{45 m_2^2}{8} - \frac{2 m_0^2 m_1^2}{35} + \right. \\ &+ \left. \frac{75 m_0 m_4}{8} - \frac{21 m_1 m_3}{2} \right) \cos^2 \theta + -\frac{3 m_2^2}{8} - \frac{5 m_0 m_4}{8} + \\ &+ \frac{2 m_0^2 m_1^2}{35} + \frac{m_3 m_1}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \left(\frac{4725 m_4 m_2}{64} + \frac{3003 m_0 m_6}{64} - \frac{1225 m_3^2}{32} - \frac{2079 m_5 m_1}{32} \right) \times \\ &\times \cos^8 \theta + \left(\frac{625 m_3^2}{8} - \frac{2415 m_4 m_2}{16} - \frac{1617 m_0 m_6}{16} + \right. \\ &+ \left. \frac{1071 m_5 m_1}{8} \right) \cos^6 \theta + \left(-\frac{14 m_0^2 m_1 m_3}{33} - \frac{1365 m_5 m_1}{16} + \right. \\ &+ \left. \frac{2205 m_0 m_6}{32} - \frac{795 m_3^2}{16} + \frac{3075 m_4 m_2}{32} + \frac{6 m_0 m_1^2 m_2}{77} \right) \times \\ &\times \cos^4 \theta + \left(\frac{135 m_5 m_1}{8} + \frac{81 m_3^2}{8} - \frac{315 m_4 m_2}{16} - \frac{245 m_0 m_6}{16} - \right. \\ &- \left. \frac{16 m_0^4 m_1^2}{1575} + \frac{28 m_0^2 m_1 m_3}{55} - \frac{4 m_0 m_1^2 m_2}{231} \right) \cos^2 \theta - \\ &- \frac{9 m_3^2}{32} - \frac{2 m_0 m_1^2 m_2}{33} - \frac{14 m_0^2 m_1 m_3}{165} + \frac{16 m_0^4 m_1^2}{1575} + \\ &+ \frac{45 m_4 m_2}{64} + \frac{35 m_0 m_6}{64} - \frac{15 m_5 m_1}{32} \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

C.2 Desplazamiento del perihelio

C.2.1 Energía de la órbita

Reseñamos a continuación la expansión de la energía de una órbita ecuatorial en la geometría descrita en la sección previa:

$$E = 1 + \epsilon^2 \sum_{n=0}^{n=11} E_n \epsilon^n + O(\epsilon^{14}) \quad (\text{C.30})$$

$$E_1 = 0 \quad (\text{C.31})$$

$$E_2 = -10 E_0 - 6 - \frac{E_0^2}{2} \quad (\text{C.32})$$

$$E_3 = -\frac{8 P_1 i}{P_0^2} - \frac{12 P_1 i E_0}{P_0^2} \quad (\text{C.33})$$

$$E_4 = \frac{2 P_2}{P_0^3} + \frac{3 E_0 P_2}{P_0^3} - 13 E_0^2 + \frac{E_0^3}{2} - \frac{47}{4} - 20 E_0 \quad (\text{C.34})$$

$$E_5 = -\frac{56 P_1 i}{P_0^2} - \frac{56 P_1 i E_0^2}{P_0^2} - \frac{104 P_1 i E_0}{P_0^2} \quad (\text{C.35})$$

$$\begin{aligned} E_6 = & \frac{32 P_1^2 E_0^2}{P_0^4} - \frac{73}{2} - \frac{5 E_0^4}{8} + 69 E_0^2 + \frac{79 E_0}{4} + \frac{48 P_1^2}{P_0^4} + 8 E_0^3 + \\ & + \frac{71 P_2}{2 P_0^3} + \frac{78 E_0 P_2}{P_0^3} + \frac{39 E_0^2 P_2}{P_0^3} + \frac{80 E_0 P_1^2}{P_0^4} \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

$$\begin{aligned} E_7 = & \frac{24 i P_1 E_0^2 P_2}{P_0^5} - \frac{331 i P_1}{P_0^2} + \frac{44 i E_0 P_3}{P_0^4} + \frac{24 i E_0^2 P_3}{P_0^4} + \\ & + \frac{60 i P_1 E_0 P_2}{P_0^5} + \frac{17 i P_3}{P_0^4} + \frac{33 i P_1 P_2}{P_0^5} - \frac{316 i P_1 E_0}{P_0^2} + \\ & + \frac{44 i P_1 E_0^2}{P_0^2} \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned}
E_8 = & -\frac{21595}{64} - \frac{61 P_2^2}{16 P_0^6} - \frac{19 E_0^4}{2} + \frac{69365 P_2}{224 P_0^3} + \frac{4309 E_0^2}{16} - \\
& - \frac{7 E_0^2 P_2^2}{4 P_0^6} + \frac{165345 P_1^2}{224 P_0^4} + \frac{20679 E_0^2 P_2}{56 P_0^3} - \frac{111 P_4}{16 P_0^5} + \\
& + \frac{131 P_1^2 E_0^3}{4 P_0^4} + \frac{225 E_0^3 P_2}{4 P_0^3} - \frac{45 E_0^2 P_4}{4 P_0^5} - \frac{75 E_0 P_4}{4 P_0^5} + \\
& + \frac{16659 P_1^2 E_0^2}{56 P_0^4} + \frac{116983 E_0 P_1^2}{112 P_0^4} + \\
& + \frac{789 E_0^3}{8} - \frac{25 E_0 P_2^2}{4 P_0^6} - \frac{4689 E_0}{32} + \frac{73571 E_0 P_2}{112 P_0^3} + \\
& + \frac{7 E_0^5}{8}
\end{aligned} \tag{C.38}$$

$$\begin{aligned}
E_9 = & \frac{796 i P_1 E_0^2 P_2}{P_0^5} + \frac{1400 i P_1 E_0^2}{P_0^2} - \frac{2620 i P_1 E_0}{P_0^2} + \frac{912 i E_0^3 P_1}{P_0^2} + \\
& + \frac{224 i P_1^3 E_0^2}{P_0^6} + \frac{564 i E_0^2 P_3}{P_0^4} + \frac{704 i P_1^3 E_0}{P_0^6} + \frac{114 i E_0^3 P_3}{P_0^4} + \\
& + \frac{464 i P_1^3}{P_0^6} + \frac{102 i E_0^3 P_1 P_2}{P_0^5} + \frac{1663 i P_1 P_2}{2 P_0^5} + \frac{485 i P_3}{2 P_0^4} - \\
& - \frac{3058 i P_1}{P_0^2} + \frac{3269 i P_1 E_0 P_2}{2 P_0^5} + \frac{1407 i E_0 P_3}{2 P_0^4}
\end{aligned} \tag{C.39}$$

$$\begin{aligned}
E_{10} = & -\frac{47593}{16} - \frac{1341 E_0^3}{16} - \frac{499 E_0^4}{8} - \frac{164305 E_0}{64} + \frac{9621 E_0^2}{32} - \\
& - \frac{5079 P_4}{32 P_0^5} - \frac{4059 E_0 P_4}{8 P_0^5} - \frac{3735 E_0^2 P_4}{8 P_0^5} - \frac{225 E_0^3 P_4}{2 P_0^5} - \\
& - \frac{67 P_1^2 E_0^4}{4 P_0^4} - \frac{77395 P_1^2 E_0^3}{56 P_0^4} - \frac{288 P_1^2 E_0^2 P_2}{P_0^7} - \frac{120 E_0^3 P_1 P_3}{P_0^6} + \\
& + \frac{55 E_0^5}{4} + \frac{198701 E_0^2 P_2}{112 P_0^3} - \frac{672 P_1 E_0^2 P_3}{P_0^6} - \frac{346 P_1 P_3}{P_0^6} - \\
& - \frac{942 P_1 E_0 P_3}{P_0^6} + \frac{2634495 E_0 P_1^2}{224 P_0^4} - \frac{498 P_1^2 P_2}{P_0^7} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1058831 E_0 P_2}{224 P_0^3} + \frac{14953 P_1^2 E_0^2}{112 P_0^4} - \frac{2829 E_0 P_2^2}{8 P_0^6} - \\
& - \frac{1473 E_0^2 P_2^2}{8 P_0^6} - \frac{840 E_0 P_1^2 P_2}{P_0^7} - \frac{5277 P_2^2}{32 P_0^6} + \frac{67845 P_1^2}{7 P_0^4} + \\
& + \frac{293585 P_2}{112 P_0^3} - \frac{21 E_0^6}{16} - \frac{153 E_0^4 P_2}{4 P_0^3} - \frac{47 E_0^3 P_2^2}{2 P_0^6} + \\
& + \frac{5253 E_0^3 P_2}{56 P_0^3} \tag{C.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{11} = & - \frac{969 i P_5}{16 P_0^6} - \frac{1395 i P_1 E_0^2 P_4}{4 P_0^7} - \frac{2565 P_1 i P_4}{16 P_0^7} - \\
& - \frac{3645 P_1 i E_0 P_4}{8 P_0^7} - \frac{975 i E_0^2 P_5}{4 P_0^6} - \frac{1797 i E_0 P_5}{8 P_0^6} - \frac{29 i E_0^3 P_2 P_3}{P_0^7} - \\
& - \frac{63 i P_1 E_0^2 P_2^2}{P_0^8} - \frac{1775 i P_1^3 E_0^3}{7 P_0^6} + \frac{4537 i P_3}{2 P_0^4} + \frac{1316 i E_0^3 P_3}{P_0^4} - \\
& - \frac{787 i P_2 P_3}{8 P_0^7} - \frac{365 i E_0^2 P_2 P_3}{2 P_0^7} + \frac{60511 i P_1^3 E_0^2}{14 P_0^6} + \\
& + \frac{6173 i E_0 P_3}{P_0^4} + \frac{4850 i E_0^2 P_3}{P_0^4} - \frac{1063 i E_0 P_2 P_3}{4 P_0^7} - \\
& - \frac{266365 P_1 i E_0}{8 P_0^2} + \frac{507707 i P_1^3 E_0}{28 P_0^6} + \frac{11491 i P_1 E_0^2}{4 P_0^2} + \\
& + \frac{716687 P_1 i P_2}{56 P_0^5} - \frac{225 P_1 i E_0 P_2^2}{P_0^8} - \frac{504319 P_1 i}{16 P_0^2} + \\
& + \frac{708261 i P_1^3}{56 P_0^6} + \frac{680473 P_1 i E_0 P_2}{28 P_0^5} + \frac{152597 i P_1 E_0^2 P_2}{14 P_0^5} + \\
& + \frac{8915 i E_0^3 P_1 P_2}{7 P_0^5} - \frac{549 P_1 i P_2^2}{4 P_0^8} + \frac{6817 i E_0^3 P_1}{2 P_0^2} - \\
& - \frac{135 i E_0^3 P_5}{2 P_0^6} - \frac{135 i E_0^3 P_1 P_4}{2 P_0^7} \tag{C.41}
\end{aligned}$$

donde E_0 , la energía de la órbita clásica de Kepler, es un parámetro libre cuyo límite inferior es $-1/2$, que corresponde a una órbita circular.

C.2.2 Frecuencia angular

En esta apartado se incluye la expresión de la frecuencia angular de una órbita ecuatorial:

$$\psi = \omega \phi \quad (\text{C.42})$$

$$\omega^2 = 1 + \sum_{n=2}^{11} \omega_n \epsilon^n + O(\epsilon^{12}) \quad (\text{C.43})$$

$$\omega_2 = -6 \quad (\text{C.44})$$

$$\omega_3 = -\frac{8 P_1 i}{P_0^2} \quad (\text{C.45})$$

$$\omega_4 = \frac{3 P_2}{P_0^3} - 15 E_0 - \frac{51}{2} \quad (\text{C.46})$$

$$\omega_5 = -\frac{96 P_1 i}{P_0^2} - \frac{48 P_1 i E_0}{P_0^2} \quad (\text{C.47})$$

$$\begin{aligned} \omega_6 = & -123 - 30 E_0 + \frac{42 E_0 P_2}{P_0^3} + \frac{72 P_1^2}{P_0^4} + \frac{24 E_0 P_1^2}{P_0^4} + \\ & + \frac{63 P_2}{P_0^3} \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

$$\begin{aligned} \omega_7 = & \frac{54 P_1 i P_2}{P_0^5} - \frac{36 P_1 i E_0^2}{P_0^2} - \frac{852 P_1 i}{P_0^2} + \frac{24 P_1 i E_0 P_2}{P_0^5} + \frac{30 i P_3}{P_0^4} - \\ & - \frac{408 P_1 i E_0}{P_0^2} + \frac{24 i E_0 P_3}{P_0^4} \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned}
\omega_8 = & \frac{25287 P_1^2}{16 P_0^4} - \frac{51 P_2^2}{8 P_0^6} + \frac{195 P_1^2 E_0^2}{4 P_0^4} + \frac{375 E_0^2 P_2}{4 P_0^3} - \\
& - \frac{15 E_0 P_2^2}{4 P_0^6} - \frac{105 P_4}{8 P_0^5} - \frac{30315}{32} - \frac{1875 E_0}{8} + \frac{645 E_0^2}{8} + \\
& + \frac{11235 P_2}{16 P_0^3} - \frac{45 E_0 P_4}{4 P_0^5} + \frac{22431 E_0 P_1^2}{28 P_0^4} + \frac{15831 E_0 P_2}{28 P_0^3} \quad (C.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_9 = & \frac{531 i P_3}{P_0^4} - \frac{8380 P_1 i}{P_0^2} + \frac{864 i P_1^3}{P_0^6} + \frac{609 i E_0 P_3}{P_0^4} + \\
& + \frac{1725 P_1 i P_2}{P_0^5} + \frac{126 P_1 i E_0^2 P_2}{P_0^5} - \frac{3672 P_1 i E_0}{P_0^2} + \frac{384 i P_1^3 E_0}{P_0^6} + \\
& + \frac{48 P_1 i E_0^2}{P_0^2} + \frac{138 i E_0^2 P_3}{P_0^4} + \frac{16 P_1 i E_0^3}{P_0^2} + \frac{1191 P_1 i E_0 P_2}{P_0^5} \quad (C.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{10} = & \frac{94785 E_0 P_1^2}{7 P_0^4} - \frac{684 P_1 E_0 P_3}{P_0^6} - \frac{948 P_1^2 P_2}{P_0^7} + \frac{7605 P_1^2 E_0^2}{7 P_0^4} - \\
& - \frac{165 E_0^2 P_2^2}{4 P_0^6} - \frac{5535 P_4}{16 P_0^5} + \frac{15051 E_0^2 P_2}{14 P_0^3} - \frac{135 E_0^2}{4} - \\
& - \frac{1185 E_0 P_2^2}{4 P_0^6} - \frac{708 P_1 P_3}{P_0^6} - \frac{495 E_0^2 P_4}{4 P_0^5} + \frac{691701 P_1^2}{28 P_0^4} - \\
& - \frac{5397 P_2^2}{16 P_0^6} + \frac{82359 E_0 P_2}{14 P_0^3} - \frac{1875 E_0 P_4}{4 P_0^5} - \frac{504 E_0 P_1^2 P_2}{P_0^7} - \\
& - \frac{13215 E_0}{4} - \frac{135159}{16} + \frac{409347 P_2}{56 P_0^3} - \frac{120 P_1 E_0^2 P_3}{P_0^6} \quad (C.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{11} = & - \frac{945 i P_5}{8 P_0^6} - \frac{135 i P_1 E_0^2 P_4}{2 P_0^7} - \frac{2745 i P_1 P_4}{8 P_0^7} - \frac{360 i P_1 E_0 P_4}{P_0^7} - \\
& - \frac{135 i E_0^2 P_5}{2 P_0^6} - \frac{210 i E_0 P_5}{P_0^6} + \frac{6384 i P_3}{P_0^4} + \frac{102 i E_0^3 P_3}{P_0^4} - \\
& - \frac{843 i P_2 P_3}{4 P_0^7} - \frac{45 i E_0^2 P_2 P_3}{P_0^7} + \frac{11238 i P_1^3 E_0^2}{7 P_0^6} + \frac{7781 i E_0 P_3}{P_0^4} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2496 i E_0^2 P_3}{P_0^4} - \frac{240 i E_0 P_2 P_3}{P_0^7} - \frac{45483 i P_1 E_0}{P_0^2} + \\
& + \frac{118814 i P_1^3 E_0}{7 P_0^6} - \frac{15 i P_1 E_0^4}{P_0^2} - \frac{2007 i P_1 E_0^2}{P_0^2} + \\
& + \frac{227856 i P_1 P_2}{7 P_0^5} - \frac{150 i P_1 E_0 P_2^2}{P_0^8} - \frac{361173 i P_1}{4 P_0^2} + \\
& + \frac{411651 i P_1^3}{14 P_0^6} + \frac{187205 i P_1 E_0 P_2}{7 P_0^5} + \frac{33870 i P_1 E_0^2 P_2}{7 P_0^5} + \\
& + \frac{90 i E_0^3 P_1 P_2}{P_0^5} - \frac{255 i P_1 P_2^2}{P_0^8} + \frac{492 i E_0^3 P_1}{P_0^2}
\end{aligned} \tag{C.53}$$

C.2.3 Desplazamiento del perihelio

Finalmente incluimos el desplazamiento del perihelio de la órbita cuyos parámetros se han descrito con anterioridad:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi & = 2\pi(\omega^{-1} - 1) = \pi \{ \Delta_{class} + \Delta_{mon} + \Delta_{dip} + \Delta_{quad} + \Delta_{oct} + \\
& + \Delta_{sed} + \Delta_{trig} + \Delta_{d-q} + \Delta_{d-o} + \Delta_{d-s} + \Delta_{q-o} \}
\end{aligned} \tag{C.54}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{class} & = -\frac{3 P_2}{P_0^3} \epsilon^4 + \left(\frac{105 P_4}{8 P_0^5} + \frac{105 P_2^2}{8 P_0^6} + \frac{45 E_0 P_4}{4 P_0^5} + \right. \\
& \left. + \frac{15 E_0 P_2^2}{4 P_0^6} \right) \epsilon^8
\end{aligned} \tag{C.55}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{mon} & = 6 \epsilon^2 + \left(15 E_0 + \frac{105}{2} \right) \epsilon^4 + \left(165 E_0 + \frac{975}{2} \right) \epsilon^6 + \\
& + \left(\frac{159105}{32} + \frac{705 E_0^2}{8} + \frac{16725 E_0}{8} \right) \epsilon^8 + \left(\frac{1701507}{32} + \right. \\
& \left. + \frac{216375 E_0}{8} + \frac{20115 E_0^2}{8} \right) \epsilon^{10}
\end{aligned} \tag{C.56}$$

$$\Delta_{dip} = \frac{8 P_1 i \epsilon^3}{P_0^2} + \left(\frac{168 P_1 i}{P_0^2} + \frac{48 P_1 i E_0}{P_0^2} \right) \epsilon^5 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{24 E_0 P_1^2}{P_0^4} - \frac{120 P_1^2}{P_0^4} \right) \epsilon^6 + \left(\frac{36 P_1 i E_0^2}{P_0^2} + \right. \\
& + \frac{1020 P_1 i E_0}{P_0^2} + \frac{2562 P_1 i}{P_0^2} \left. \right) \epsilon^7 + \left(-\frac{44607 E_0 P_1^2}{28 P_0^4} - \right. \\
& - \frac{65607 P_1^2}{16 P_0^4} - \frac{195 E_0^2 P_1^2}{4 P_0^4} \left. \right) \epsilon^8 + \left(\frac{36046 P_1 i}{P_0^2} - \right. \\
& - \frac{2048 i P_1^3}{P_0^6} - \frac{672 i E_0 P_1^3}{P_0^6} + \frac{17640 P_1 i E_0}{P_0^2} + \\
& + \frac{1356 P_1 i E_0^2}{P_0^2} - \frac{16 P_1 i E_0^3}{P_0^2} \left. \right) \epsilon^9 + \left(-\frac{10256685 P_1^2}{112 P_0^4} - \right. \\
& - \frac{118305 E_0^2 P_1^2}{28 P_0^4} - \frac{1320387 E_0 P_1^2}{28 P_0^4} \left. \right) \epsilon^{10} + \left(\frac{3927489 P_1 i}{8 P_0^2} + \right. \\
& + \frac{15 P_1 i E_0^4}{P_0^2} - \frac{341339 i E_0 P_1^3}{7 P_0^6} + \frac{174 P_1 i E_0^3}{P_0^2} + \\
& + \frac{569361 P_1 i E_0}{2 P_0^2} + \frac{70659 P_1 i E_0^2}{2 P_0^2} - \frac{2735961 i P_1^3}{28 P_0^6} - \\
& - \left. \frac{27429 i P_1^3 E_0^2}{7 P_0^6} \right) \epsilon^{11} \tag{C.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{quad} & = \left(-\frac{90 P_2}{P_0^3} - \frac{42 E_0 P_2}{P_0^3} \right) \epsilon^6 + \left(-\frac{28305 E_0 P_2}{28 P_0^3} - \right. \\
& - \frac{375 E_0^2 P_2}{4 P_0^3} - \frac{25383 P_2}{16 P_0^3} \left. \right) \epsilon^8 + \left(\frac{12471 P_2^2}{16 P_0^6} - \right. \\
& - \frac{2686203 P_2}{112 P_0^3} - \frac{80187 E_0^2 P_2}{28 P_0^3} - \frac{503379 E_0 P_2}{28 P_0^3} + \\
& + \left. \frac{519 E_0 P_2^2}{P_0^6} + \frac{165 E_0^2 P_2^2}{4 P_0^6} \right) \epsilon^{10} \tag{C.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{oct} & = \left(-\frac{24 i E_0 P_3}{P_0^4} - \frac{30 i P_3}{P_0^4} \right) \epsilon^7 + \left(-\frac{801 i P_3}{P_0^4} - \frac{825 i E_0 P_3}{P_0^4} - \right. \\
& - \frac{138 i E_0^2 P_3}{P_0^4} \left. \right) \epsilon^9 + \left(-\frac{102 i E_0^3 P_3}{P_0^4} - \frac{4278 i E_0^2 P_3}{P_0^4} - \right. \\
& - \left. \frac{16475 i E_0 P_3}{P_0^4} - \frac{28671 i P_3}{2 P_0^4} \right) \epsilon^{11} \tag{C.59}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{sed} = \left(\frac{7425 P_4}{16 P_0^5} + \frac{495 E_0^2 P_4}{4 P_0^5} + \frac{570 E_0 P_4}{P_0^5} \right) \epsilon^{10} \quad (C.60)$$

$$\Delta_{trig} = \left(\frac{945 iP_5}{8 P_0^6} + \frac{135 iE_0^2 P_5}{2 P_0^6} + \frac{210 iE_0 P_5}{P_0^6} \right) \epsilon^{11} \quad (C.61)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{d-q} = & \left(-\frac{90 iP_2 P_1}{P_0^5} - \frac{24 P_1 iE_0 P_2}{P_0^5} \right) \epsilon^7 + \left(-\frac{3939 iP_2 P_1}{P_0^5} - \right. \\ & \left. - \frac{2127 P_1 iE_0 P_2}{P_0^5} - \frac{126 P_1 iE_0^2 P_2}{P_0^5} \right) \epsilon^9 + \left(\frac{2280 P_1^2 P_2}{P_0^7} + \right. \\ & \left. + \frac{900 E_0 P_1^2 P_2}{P_0^7} \right) \epsilon^{10} + \left(\frac{1419 P_1 iP_2^2}{2 P_0^8} + \frac{303 P_1 iE_0 P_2^2}{P_0^8} - \right. \\ & \left. - \frac{90 P_1 iE_0^3 P_2}{P_0^5} - \frac{75765 P_1 iE_0^2 P_2}{7 P_0^5} - \frac{2825301 iP_2 P_1}{28 P_0^5} - \right. \\ & \left. - \frac{507992 P_1 iE_0 P_2}{7 P_0^5} \right) \epsilon^{11} \quad (C.62) \end{aligned}$$

$$\Delta_{d-o} = \left(\frac{1068 P_1 P_3}{P_0^6} + \frac{120 P_1 E_0^2 P_3}{P_0^6} + \frac{972 E_0 P_1 P_3}{P_0^6} \right) \epsilon^{10} \quad (C.63)$$

$$\Delta_{d-s} = \left(\frac{4005 P_1 iP_4}{8 P_0^7} + \frac{495 P_1 iE_0 P_4}{P_0^7} + \frac{135 P_1 iE_0^2 P_4}{2 P_0^7} \right) \epsilon^{11} \quad (C.64)$$

$$\Delta_{q-o} = \left(\frac{1383 iP_2 P_3}{4 P_0^7} + \frac{348 iE_0 P_2 P_3}{P_0^7} + \frac{45 iE_0^2 P_2 P_3}{P_0^7} \right) \epsilon^{11} \quad (C.65)$$

C.3 Desplazamiento de la línea de nodos

C.3.1 Energía de la órbita circular

A continuación figura la energía de la órbita circular de referencia para el cálculo del desplazamiento de la línea de nodos de una trayectoria próxima:

$$E = 1 - \frac{P_0^2}{2l^2} + \sum_{n=4}^{13} E_n l^{-n} + O(l^{-14}) \quad (\text{C.66})$$

$$E_4 = -\frac{9P_0^4}{8} \quad (\text{C.67})$$

$$E_5 = -2P_0^3 i P_1 \quad (\text{C.68})$$

$$E_6 = \frac{P_0^3 P_2}{2} - \frac{81P_0^6}{16} \quad (\text{C.69})$$

$$E_7 = -18P_0^5 i P_1 \quad (\text{C.70})$$

$$E_8 = 16P_0^4 P_1^2 + \frac{25P_0^5 P_2}{4} - \frac{3861P_0^8}{128} \quad (\text{C.71})$$

$$E_9 = 9P_0^4 P_2 i P_1 - 162iP_0^7 P_1 + iP_0^5 P_3 \quad (\text{C.72})$$

$$E_{10} = \frac{7449P_0^7 P_2}{112} - \frac{9P_2^2 P_0^4}{8} - \frac{53703P_0^{10}}{256} + \frac{8013P_1^2 P_0^6}{28} - \frac{3P_0^5 P_4}{8} \quad (\text{C.73})$$

$$E_{11} = \frac{401iP_0^6 P_1 P_2}{2} - 1512iP_0^9 P_1 + \frac{35iP_0^7 P_3}{2} + 168P_0^5 P_1^3 i \quad (\text{C.74})$$

$$\begin{aligned}
E_{12} &= \frac{224933 P_0^8 P_1^2}{56} - 150 P_0^5 P_1^2 P_2 - \frac{1648269 P_0^{12}}{1024} + \\
&+ \frac{153943 P_0^9 P_2}{224} - \frac{499 P_0^6 P_2^2}{16} - \frac{123 P_0^7 P_4}{16} - \\
&- 28 P_0^6 P_1 P_3
\end{aligned} \tag{C.75}$$

$$\begin{aligned}
E_{13} &= -\frac{81 P_0^5 i P_1 P_2^2}{2} - \frac{15 P_0^6 i P_3 P_2}{2} + 230 P_0^9 i P_3 - \\
&- 14580 P_0^{11} i P_1 - \frac{3 P_0^7 i P_5}{4} + \frac{22487 P_0^8 i P_1 P_2}{7} - \\
&- \frac{45 P_0^6 i P_1 P_4}{4} + \frac{32855 P_0^7 i P_1^3}{7}
\end{aligned} \tag{C.76}$$

C.3.2 Frecuencia angular

En este apartado figura la expansión de la frecuencia angular de los nodos de una trayectoria próxima a una geodésica circular ecuatorial:

$$\Omega^2 = 1 + \sum_{n=3}^{13} \Omega_n l^{-n} + O(l^{-14}) \tag{C.77}$$

$$\Omega_3 = 4 P_0 i P_1 \tag{C.78}$$

$$\Omega_4 = -3 P_0 P_2 \tag{C.79}$$

$$\Omega_5 = 18 P_0^3 i P_1 \tag{C.80}$$

$$\Omega_6 = -30 P_0^2 P_1^2 - 24 P_0^3 P_2 \tag{C.81}$$

$$\Omega_7 = \frac{243 P_0^5 i P_1}{2} - 36 P_0^2 P_2 i P_1 - 12 i P_0^3 P_3 \quad (\text{C.82})$$

$$\Omega_8 = -\frac{5643 P_0^4 P_1^2}{14} - \frac{2799 P_0^5 P_2}{14} + \frac{9 P_0^2 P_2^2}{2} + \frac{15 P_0^3 P_4}{2} \quad (\text{C.83})$$

$$\Omega_9 = \frac{3861 i P_0^7 P_1}{4} - 666 P_0^4 P_2 i P_1 - 336 P_0^3 P_1^3 i - 156 i P_0^5 P_3 \quad (\text{C.84})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{10} = & 132 P_2^2 P_0^4 - \frac{34098 P_1^2 P_0^6}{7} + 120 P_0^5 P_4 - \frac{12396 P_0^7 P_2}{7} + \\ & + 534 P_1^2 P_2 P_0^3 + 258 P_1 P_3 P_0^4 \end{aligned} \quad (\text{C.85})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} = & 75 i P_0^4 P_3 P_2 - \frac{132705 i P_0^6 P_1 P_2}{14} + \frac{345 i P_0^4 P_1 P_4}{2} + \\ & + \frac{45 i P_0^5 P_5}{2} + 162 i P_0^3 P_1 P_2^2 - \frac{56802 P_0^5 P_1^3 i}{7} + \\ & + \frac{268515 i P_0^9 P_1}{32} - \frac{3387 i P_0^7 P_3}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.86})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{12} = & \frac{177043 P_0^5 P_1^2 P_2}{11} - \frac{315 P_0^4 P_2 P_4}{8} + \frac{127921 P_0^6 P_1 P_3}{22} - \\ & - \frac{1259627 P_0^8 P_1^2}{22} + 4496 P_0^4 P_1^4 + \frac{26335 P_0^6 P_2^2}{11} - \\ & - \frac{361993 P_0^9 P_2}{22} + \frac{2905 P_0^7 P_4}{2} - \frac{105 P_0^5 P_6}{8} - \\ & - \frac{27 P_0^3 P_2^3}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

$$\Omega_{13} = -144388 P_0^7 i P_1^3 - \frac{492505 P_0^8 i P_1 P_2}{4} + 4896 P_0^5 i P_1^2 P_3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4239 P_0^6 i P_3 P_2}{2} + \frac{17883 P_0^6 i P_1 P_4}{4} + 8808 P_0^4 i P_1^3 P_2 + \\
& + \frac{1905 P_0^7 i P_5}{4} - 17707 P_0^9 i P_3 + \frac{13095 P_0^5 i P_1 P_2^2}{2} + \\
& + \frac{4944807 P_0^{11} i P_1}{64}
\end{aligned} \tag{C.88}$$

C.3.3 Desplazamiento de la línea de nodos

Incluimos a continuación el desplazamiento angular, en cada revolución, de los nodos de una órbita próxima a un círculo geodésico ecuatorial. Los términos están clasificados según su origen multipolar.

$$\begin{aligned}
\Delta\phi & = \pi \{ \Delta_{class} + \Delta_{dip} + \Delta_{quad} + \Delta_{oct} + \Delta_{sed} + \Delta_{trig} + \Delta_{d-q} + \\
& + \Delta_{d-o} + \Delta_{d-q} + \Delta_{q-o} \}
\end{aligned} \tag{C.89}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{class} & = \frac{3 P_0 P_2}{l^4} + \left(\frac{9 P_0^2 P_2^2}{4} - \frac{15 P_0^3 P_4}{2} \right) l^{-8} + \left(\frac{45 P_0^4 P_2 P_4}{8} + \right. \\
& \left. + \frac{105 P_0^5 P_6}{8} + \frac{81 P_0^3 P_2^3}{8} \right) l^{-12}
\end{aligned} \tag{C.90}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{dip} & = -\frac{4 P_0 i P_1}{l^3} - \frac{18 P_0^3 i P_1}{l^5} + \frac{18 P_0^2 P_1^2}{l^6} - \frac{243 P_0^5 i P_1}{2 l^7} + \\
& + \frac{4131 P_0^4 P_1^2}{14 l^8} + \left(196 P_0^3 i P_1^3 - \frac{3861 P_0^7 i P_1}{4} \right) l^{-9} + \\
& + \frac{27294 P_0^6 P_1^2}{7 l^{10}} + \left(\frac{37983 P_0^5 i P_1^3}{7} - \frac{268515 P_0^9 i P_1}{32} \right) l^{-11} + \\
& + \left(-2565 P_0^4 P_1^4 + \frac{1060043 P_0^8 P_1^2}{22} \right) l^{-12} + \\
& + \left(\frac{734200 P_0^7 i P_1^3}{7} - \frac{4944807 P_0^{11} i P_1}{64} \right) l^{-13}
\end{aligned} \tag{C.91}$$

$$\Delta_{quad} = \frac{24 P_0^3 P_2}{l^6} + \frac{2799 P_0^5 P_2}{14 l^8} + (-24 P_0^4 P_2^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{12396 P_0^7 P_2}{7} \Big) l^{-10} + \left(-\frac{327223 P_0^6 P_2^2}{308} + \right. \\
& \left. + \frac{361993 P_0^9 P_2}{22} \right) l^{-12} \tag{C.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{oct} &= \frac{12 P_0^3 i P_3}{l^7} + \frac{156 P_0^5 i P_3}{l^9} + \frac{3387 P_0^7 i P_3}{2 l^{11}} + \\
& + \frac{17707 P_0^9 i P_3}{l^{13}} \tag{C.93}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{sed} = -\frac{120 P_0^5 P_4}{l^{10}} - \frac{2905 P_0^7 P_4}{2 l^{12}} \tag{C.94}$$

$$\Delta_{trig} = -\frac{45 P_0^5 i P_5}{2 l^{11}} - \frac{1905 P_0^7 i P_5}{4 l^{13}} \tag{C.95}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{d-q} &= \frac{18 P_0^2 i P_1 P_2}{l^7} + \frac{441 P_0^4 i P_1 P_2}{l^9} - \frac{273 P_0^3 P_1^2 P_2}{l^{10}} + \\
& + \left(-\frac{81 P_0^3 i P_1 P_2^2}{2} + \frac{198369 P_0^6 i P_1 P_2}{28} \right) l^{-11} - \\
& - \frac{3007003 P_0^5 P_1^2 P_2}{308 l^{12}} + \left(-4482 P_0^4 i P_1^3 P_2 + \right. \\
& \left. + \frac{5509583 P_0^8 i P_1 P_2}{56} - \frac{10899 P_0^5 i P_1 P_2^2}{4} \right) l^{-13} \tag{C.96}
\end{aligned}$$

$$\Delta_{d-o} = -\frac{186 P_0^4 P_1 P_3}{l^{10}} - \frac{100201 P_0^6 P_1 P_3}{22 l^{12}} - \frac{3168 P_0^5 i P_1^2 P_3}{l^{13}} \tag{C.97}$$

$$\Delta_{d-s} = -\frac{255 P_0^4 i P_1 P_4}{2 l^{11}} - \frac{14193 P_0^6 i P_1 P_4}{4 l^{13}} \tag{C.98}$$

$$\Delta_{q-o} = -\frac{21 P_0^4 i P_3 P_2}{l^{11}} - \frac{1971 P_0^6 i P_3 P_2}{2 l^{13}} \tag{C.99}$$

Bibliografía

- [1] H. Weyl, *Ann. d. Phys.* **54**, 117 (1917)
- [2] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Letters* **11**, 237 (1963)
- [3] F. J. Ernst, *Phys.Rev.* **167**, 1175 (1968)
- [4] F. J. Ernst, *Phys.Rev.* **168**, 1415 (1968)
- [5] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solution's of Einstein's Field equations* Cambridge University Press, Cambridge (1980)
- [6] *Solutions of Einstein's equations: Techniques and Results* (eds.: C. Hoenselaers and W. Dietz, Springer Verlag), Berlin-New York (1984)
- [7] B. K. Harrison, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1197 (1978)
- [8] G. Neugebauer, *J. Phys. A: Math. Gen* **12**, L67 (1978)
- [9] F. J. Chinea, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 221 (1983)
- [10] V. A. Belinsky, V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **48**, 895 (1978)
- [11] V. A. Belinsky, V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **50**, 1 (1979)
- [12] C. Hoenselaers, W. Kinnersley, B. C. Xanthopoulos, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 481 (1979)
- [13] C. Hoenselaers, W. Kinnersley, B. C. Xanthopoulos, *J. Math. Phys.* **20**, 2530 (1979)

- [14] *El Escorial Summer School on Gravitation and General Relativity 1992: Rotating Objects and Other Topics* (eds.: F. J. Chinae and L. M. González-Romero), Springer-Verlag, Berlin-New York (1993)
- [15] J. L. Hernández-Pastora, J. Martín, (sin publicar)
- [16] L. M. González-Romero, *tesis doctoral*, Universidad Complutense de Madrid (1991) (sin publicar)
- [17] F. J. Chinae, L. M. González-Romero, *Class. Quantum Grav.* **9**, 1271 (1992)
- [18] W. Israel, *Nuovo Cimento* **44 B**, 1 (1966)
- [19] W. Israel, *Phys. Rev.* **D 2**, 641 (1970)
- [20] L. Fernández-Jambrina, F. J. Chinae, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2521 (1993)
- [21] L. Fernández-Jambrina, F. J. Chinae, (sin publicar)
- [22] J.M.M. Senovilla, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2219 (1990)
- [23] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973)
- [24] M. Gürses, *J. Math. Phys.* **18**, 2356 (1977)
- [25] W. G. Dixon, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **277**, 59 (1974)
- [26] R. Geroch, *J. Math. Phys.* **11**, 2580 (1970)
- [27] R. O. Hansen, *J. Math. Phys.* **15**, 46 (1974)
- [28] W. Simon, *J. Math. Phys.* **25**, 1035 (1984)
- [29] C. Hoenselaers, Z. Perjés, *Class. Quantum Grav.* **7**, 1819 (1990)
- [30] C. Lanczos, *Ann. d. Phys.* **74**, 518 (1924)
- [31] V. de la Cruz, W. Israel *Phys. Rev.* **170**, 1187 (1968)
- [32] R. C. Tolman, *Phys. Rev.* **35**, 875 (1930)
- [33] C. A. López, *Nuovo Cimento* **66 B**, 17 (1981)

- [34] A. Komar, *Phys. Rev.* **127**, 1411 (1962)
- [35] A. Trautman, contribución en *Gravitation* (ed. L. Witten), John Wiley and Sons, Inc. New York (1963)
- [36] O.D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*. Dover, New York, 1954.
- [37] H. Thirring, J. Lense, *Phys. Z.* **19** 156 (1918)
- [38] L. Fernández-Jambrina, (sin publicar)
- [39] W. B. Bonnor, *Z. Phys.* **161**, 439 (1961)
- [40] B. Carter, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968)
- [41] W. B. Bonnor, *Z. Phys.* **190**, 444 (1966)
- [42] D. M. Zipoy, *J. Math. Phys.* **7**, 1137 (1966)
- [43] H. E. J. Curzon, *Proc. London Math. Soc.* **23**, 477 (1924)
- [44] W. B. Bonnor, A. Sackfield, *Commun. Math. Phys.* **8**, 338 (1968)
- [45] A. Papapetrou, *Ann. d. Phys.* **12**, 309 (1953)
- [46] G. Fodor, C. Hoenselaers, Z. Perjés, *J. Math. Phys.* **30**, 2252 (1989) (1988)
- [47] T. D'amour, G. Schäfer, *Nuovo Cimento B* **101**, 127
- [48] L. Fernández-Jambrina, C. Hoenselaers, (sin publicar)
- [49] C. Hoenselaers, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 324 (1977)
- [50] H. Quevedo, *Ph. D. Thesis* Universität zu Köln (1987)
- [51] F. J. Ernst, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968)
- [52] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (1980)
- [53] V. Perlick, *Class. Quantum Grav.* **9**, 1009 (1992)

- [54] C. Hoenselaers, contribución en *El Escorial Summer School on Gravitation and General Relativity 1992: Rotating Objects and Other Topics* (eds.: F. J. Chinae and L. M. González-Romero), Springer-Verlag, Berlin-New York (1993)
- [55] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, New York (1965)
- [56] E. T. Newman, L. Tamburino, T. J. Unti, *J. Math. Phys.* **4**, 915 (1963)
- [57] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1973)
- [58] F. J. Chinae, L. Fernández-Jambrina, J. M. M. Senovilla, *Phys. Rev.* **D45**, 481 (1992)
- [59] J. Beem, P. Ehrlich, *Global Lorentzian Geometry*, Dekker, New York (1981)
- [60] R. Geroch, *J. Math. Phys.* **11**, 437 (1970)
- [61] R. Penrose, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57 (1965)
- [62] S.W. Hawking, R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. London A* **314**, 529 (1970)
- [63] E. Ruiz, J.M.M Senovilla, *Phy. Rev.* **D 45**, 1995 (1992)
- [64] J. M. M. Senovilla, contribución en *El Escorial Summer School on Gravitation and General Relativity 1992: Rotating Objects and Other Topics* (eds.: F. J. Chinae and L. M. González-Romero), Springer-Verlag, Berlin-New York (1993)