EJERCICIOS DE MATEL.
HOJA 1

(1) Decidir cual es el menor período de las funciones $\{x/5\}$ donde $\{x\} = x - [x]$, $\operatorname{sen}(x/3) + \cos(x/5)$, $\tan(\pi x)$, $e^{\pi n x/T}$ con $n \in \mathbb{N}$.

(2) Demostrar que toda función periódica, contínua, es acotada. Demostrar que si $f(t)$ es una función periódica y derivable, entonces $f'(t)$ también es periódica.

(3) Demostrar que si $f(t)$ es una función T-periódica integrable, entonces $\int_{t_0}^{t_0+T} f(x)dx$ es independiente de t_0. Demostrar que existe una única constante a tal que $F(t) = \int_0^t f(x)dx + at$ es una función T-periódica, y deducir que $\int_0^t f(x)dx$ es periódica si y sólo si $\int_{-T/2}^{T/2} f(x)dx = 0$.

(4) *Decidir cual de las siguientes funciones son periódicas y, en ese caso, encontrar el período T:

$x(t) = \cos(t) + \cos(\pi t)$,
$f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.
$$s(t) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t+n)^2}, t \notin \mathbb{Z} \\ 0, t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(5) Para cada una de las siguientes sucesiones $\{f_n\}$, determinar el límite puntual, en el intervalo indicado, y decidir si la convergencia es uniforme o no.
$f_n(x) = x^{1/n}$ en $[0,1]$
$f_n(x) = e^{-nx^2}$ en $[-1,1]$
$f_n(x) = e^{-x^2}/n$ en $\mathbb{R}$
$f_n(x) = \sqrt{x + 1/n} - \sqrt{x}$ en $[1, +\infty)$

(6) Sea $f \in C([-\pi,\pi])$, y $Q(t) = \sum_{-M}^{N} a_n e^{int} \in \mathbb{C}[e^{it}]$, un polinomio trigonométrico. Demostrar que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q(s)ds$ es también un polinomio trigonométrico.

(7) Sea $Q_k(t) = c_k\left((1+\cos(t))/2\right)^k$ tal que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)dt = 1$. Dar una cota superior de c_k.

Observación: Utilizar que $Q_k(t) \geq 0$ es par, y que $Q_k(t) \geq Q_k(t)\operatorname{sen}(t)$.

EJERCICIOS DE MATEL.
HOJA 2

(1) Sean $f(x) = 1$, $g(x) = x$ funciones en $C([0,1])$. Encontrar $d_\infty(f,g)$ y $d_2(f,g)$.

(2) Demostrar que el espacio de los polinomios de grado como mucho $d-1$ y coeficientes reales es isomorfo a $\mathbb{R}^d$. ¿Cual es la distancia entre $f(x) = 1$ y $g(x) = x$ con la métrica euclidea en $\mathbb{R}^d$?

(3) *Sean p y q exponentes conjugados, es decir, números positivos tal que $1/p + 1/q = 1$, y sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que $ab \leq a^p/p + b^q/q$.
Indicación: Escribir $a = e^s$, $b = e^t$ y utilizar que la función exponencial es convexa.

(4) *Demostrar la desigualdad de Hölder:

$$\int_I fg dx \leq \left\{ \int_I f^p dx \right\}^{1/p} \left\{ \int_I g^q dx \right\}^{1/q}$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo fijo, f, g continuas y positivas y p, q exponentes conjugados.
Indicación: Utilizar el ejercicio anterior con $a = f(x)/\left\{\int_I f^p dx\right\}^{1/p}$, $b = g(x)/\left\{\int_I g^q dx\right\}^{1/q}$.

(5) *En las mismas condiciones del ejercicio anterior demostrar la desigualdad de Minkowsky

$$\left\{ \int_I (f+g)^p dx \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_I f^p dx \right\}^{1/p} + \left\{ \int_I g^p dx \right\}^{1/p}$$

Indicación: Escribir $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$ y usar el ejercicio anterior.

(6) Sean $\alpha, \beta \in X$ un espacio pre-Hilbert, y definamos el coseno entre dos elementos α, β mediante la fórmula $\cos(\hat{\alpha\beta}) = \mathrm{Re} < \alpha, \beta > /(||\alpha|| \cdot ||\beta||)$.
Demostrar la ley de los cosenos

$$||\alpha - \beta||^2 = ||\alpha||^2 - 2||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cos(\hat{\alpha\beta}) + ||\beta||^2.$$

(7) Demostrar la identidad de polarización en un espacio pre-Hilbert
$$4 < x, y >= ||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x + iy||^2 - i||x - iy||^2.$$

(8) Dados x, y en un espacio pre-Hilbert, demostrar que $| < x, y > | = ||x|| \cdot ||y||$ si y sólo si $x = \lambda y$ para algún escalar λ.

(9) Comprobar la desigualdad de Minkowsky para $f(x) = x$, $g(x) = 1-x$ en $C([0, 1])$, y cualquier $p \geq 1$. ¿En la desigualdad de Minkowsky se cumple el análogo al ejercicio anterior ?

(10) **Demostrar que $l^2(\mathbb{Z})$ es completo.