ARITMÉTICA DE LA FUNCIÓN PARTICIÓN.

Definición. Una partición es

$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ para $1 \leq i \leq k$.

$$p(n) = \#\left\{\Lambda : \sum \lambda_i = n\right\}.$$

Ejemplo: $p(4) = 5$.

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

• El número de particiones de n contando el orden es 2^{n-1}.

$$1 + 1 * 1 + 1 = 1 + 2 + 1.$$

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k\geq 1} k^{1/2} c_k(n) \, \frac{d}{dx} \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{k}\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{36}\right)\right)^{\frac{1}{2}})}{\left(x - \frac{1}{24}\right))^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_n ,$$

donde $c_k(n) = \sum \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h/k}$ y $\omega_{h,k}$ ciertas raíces 24-ésimas de la unidad.

• $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(Euler)

$$\prod \frac{1}{1-q^n} = (1+q^1+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)\cdots$$

$$= \sum p(n)q^n,$$

para $|q|<1$. Entiéndase $q=e^{2\pi i z}$, $z\in\mathbb{H}$.

Teorema. *(TNP, Euler.)*

$$\prod(1-q^n) = 1-q-q^2+q^5+q^7-\cdots = \sum(-1)^n q^{n(3n+1)/2}.$$

- **Fórmula de recurrencia.**

$$p(n) = p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+\cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(p(n-\tfrac{k(3k+1)}{2})+p(n-\tfrac{k(3k-1)}{2})\right).$$

- **Condiciones de divisibilidad de $p(n)$.**
  - Para $n<50.000$

  $p(n)$ es 24984 veces par, 16628 múltiplo de 3 y

  18195 múltiplo de 5!!

Congruencias de Ramanujan.

• (Ramanujan) $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$.

1	1	2	3	5
7	11	15	22	30
42	56	77	101	135
176	231	297	385	490
627	792	1002	1255	1575
1958	2436	3010	3718	4565

•(Ramanujan) $p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$,
$p(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$.

$p(mn+r_m) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ m)$, donde $24r_m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ m)$.

•(Atkin) $p(17 \cdot 23^3 n + 2623) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 17)$.

•(Ono) Para todo primo $m \geq 5$ existen A, B, tal que $p(An+B) \equiv 0 \pmod m$

Observación. En todos los casos se cumple $m|A$ y $B \equiv r_m \,(\mathrm{mod}\ m)$.

Ejemplo: $p(59^4 \cdot 13n + 111247) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 13)$.
Observese que $p(111247) \sim 10^{365}$.

Teorema. *(Eichhorn-Ono) Sea* $m \geq 5$ *primo tal que* $m \equiv b \,(mod\ 24)$. *Si*

$$p(mn + r_m) \equiv 0 \,(mod\ m)$$

para $n < (m+1)(m+b-2)/24$, *entonces es cierto para todo* n.

Teorema. *(J.) Sea* $m \geq 5$ *primo. Si*

$$p(mn + r_m) \equiv 0 \,(mod\ m)$$

para $n < \delta(m) = (m+1)(m-1)/24$, *entonces es cierto para todo* n.

Ejemplo: Como $p(4) = 5$, entonces $p(4n+5) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 5)$ para todo n.

• **Observación.** No se sabe si $p(n) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 3)$ infinitas veces.

Lema. *(J.) Sea* $m \geq 5$ *primo,* $1 \leq j \leq \delta(m)$ *y* $n \geq 1$ *enteros. Existen enteros* $\alpha_m(j), c_{j,m}(n)$ *tal que*

$$p\left(mn - \delta(m)\right) + \sum_{l \neq 0} (-1)^l p\left(mn - \delta(m) - m^2 \frac{l(3l+1)}{2}\right)$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{\delta(m)} \alpha_m(j) c_{j,m}(n) \,(mod\ m)\,.$$

• **Observación.** Para cada m, j, $c_{m,j}(n)$ es una función divisor en n.

Formas modulares.

- $\eta(z) = q^{1/24}\prod(1-q^n)$.

$$\frac{\eta'(z)}{\eta(z)} = \frac{3}{\pi^2}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(mz+n)^2} = E_2(z).$$

$$E_{2k}(z) = C_k\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(mz+n)^{2k}}.$$

- Las series de Eisenstein son periódicas.

$$\begin{aligned} E_{2k}(z+1) =& C_k\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(mz+(n+m))^{2k}} \\ =& C_k\sum_{(M,N)\neq(0,0)}\frac{1}{(Mz+N)^{2k}} = E_{2k}(z). \end{aligned}$$

Proposición. *Sea* $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$ *para* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$. *Para* $k \geq 2$ *se tiene*

$$E_{2k}(\gamma z) = (cz+d)^{2k}E_{2k}(z).$$

Definición. Una forma modular de peso $2k$ es $f(z)$ holomorfa en $\mathbb{H}$ tal que

(1) $f(\gamma z) = (cz+d)^{2k} f(z)$ para $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$,
(2) $f(z) = \sum_{n\geq 0} a(n)q^n$.

- **Observaciones.** Son funciones periódicas $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
  No existen formas modulares de peso impar $\gamma = -\mathrm{Id}$.

Ejemplos:

- $\eta(z)^{24} = q\prod(1-q^n)^{24} := \Delta(z)$, es una forma cuspidal de peso 12.

Propiedades.

• El producto de formas modulares es una forma modular.

•M_{2k}, S_{2k} son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales de dimensión finita.

• **Base** de S_{4d} con coeficientes enteros:
$\{\Delta(z)^j E_4(z)^{d-3j}, 1 \leq j \leq d/3\}$.

• **Problema** Sabiendo $g(z) = \sum p(n)q^n$, encontrar la función generatriz $f(z) = \sum p(mn + r_m)q^n$.

Operadores de Hecke

$\sum a(n)q^n \xrightarrow{T_m} \sum a(mn)q^n = \sum a(n)q^{n/m}$.

• **Observación** Si $\dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma) = 1$,
$T_m(f)(z) = c(m)f(z)$ y $\quad a(mn) = c(m)a(n)$.

• Funciones periódicas, $T_2(f)(x) = f(\frac{x}{2})$.

$f(x)|(T_2 + T_2') = f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2})$ es un operador sobre funciones periódicas.

• Formas modulares

La traza sobre matrices de determinante m manda S_{2k} en S_{2k} y $a(n) \longrightarrow a(mn) + mb(n)$.

• **Observación** Considerar formas módulo m.

$*\sum a(n)q^n \xrightarrow{T_m} \sum a(mn)q^n.$

$*\sum a(n)q^n \sum b(n)q^{mn} \xrightarrow{T_m} \sum a(n)q^n | T_m \sum b(n)q^n.$

$*\sum a(n)q^{nl} \xrightarrow{T_m} \sum a(mn)q^{nl}, \quad (m,l)=1.$

$*\sum a(n-k)q^n \xrightarrow{T_m} \sum a(mn-k)q^n.$

• **Prueba del Teorema.**

Como $f(z) = \sum c_j \Delta(z)^j E_4(z)^{d-3j}$, bastará demostrar que $m|c_j$.

• Debemos encontrar la relación entre $\Delta(z)$ y la función partición.

Como $m^2 - 1 \equiv 0 \pmod{24}$,

$$\begin{aligned}\Delta(24z)^{\delta(m)} =& \frac{\eta^{m^2}(24z)}{\eta(24z)} \\ =& q^{-1} \sum p(n) q^{24n} q^{m^2} \prod (1-q^{24n})^{m^2}\end{aligned}$$

• **Observación.** $(1-x)^m \equiv (1-x^m) \pmod{m}$

$\Delta(24z)^{\delta(m)} \equiv \sum p(n) q^{24(n+\delta(m))} \prod (1-q^{24nm})^m \; (m).$

Por tanto, módulo m

$$\Delta(24z)^{\delta(m)}|T_m \equiv \sum p(mn-\delta(m))q^{24n}\prod(1-q^{24n})^m.$$

Sea $\Delta(24z)^{\delta(m)}|T_m = \sum a_m(n)q^n \in S_{12\delta(m)}$. Por el TNP, queda

$$\begin{aligned} a_m(n) &\equiv p\left(mn-\delta(m)\right)+ \\ &+\sum_{l\neq 0}(-1)^l p\left(mn-\delta(m)-24m^2\tfrac{l(3l+1)}{2}\right) \pmod{m}. \end{aligned}$$

Llamando $\quad \Delta(z)^j E_4(z)^{3(\delta(m)-j)} = \sum c_{j,m}(n)q^n$,

$$a_m(n) \equiv \sum_{j=1}^{\delta(m)} \alpha_m(j)c_{j,m}(n) \pmod{m},$$

para algunos $\alpha_m(j)$. Si $C = (c_{j,m}(i))$ cuadrada, entonces

$$\begin{aligned} &(a_m(1), a_m(2), \cdots, a_m(\delta(m))) \equiv \\ &\qquad \equiv C(\alpha_m(1), \alpha_m(2), \cdots, \alpha_m(\delta(m)))^t \pmod{m}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$