UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

1

- [ ] E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
- [ ] E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
- [ ] Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms — Nom

Pàgina ______ de ______

DNI

Transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

Desde el punto de vista práctico, uno no ve toda la función

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-A/2}^{A/2} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

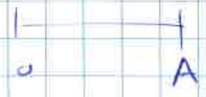
y solo tiene una muestra discreta trapezoido

$$\hat{f}(\omega) \approx \frac{A}{N}\sum_{k=1}^{N-1} f\left(\frac{Ak}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{Ak}{N}\omega} + \frac{A}{2N}\left(f(0)+f(A)\right)$$

Me interesan vectores periódicos tomo frecuencias con periodo N $\quad \frac{Ak}{N}\omega = \frac{kl}{N} \quad \omega = \frac{l}{A}$

$$\hat{f}(l) = A\,\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{Ak}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}$$

para funciones periodicas se tiene



$$f(t) \sim \sum c_n e^{\frac{2\pi i n t}{A}}$$

$$c_n = \frac{1}{A}\int_0^A f(u)\, e^{-\frac{2\pi i n u}{A}}\, du \sim \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{kA}{N}\right) e^{-\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Dada una sucesión $X(k)$, ~~$F(n)$~~ se tiene otra $F(n)$ que se llama la transformada discreta de Fourier. Al igual que en la transformada se puede recuperar. Tomamos

$$\phi_n = \left(e^{\frac{2\pi i n j}{N}}\right)_{j=0}^{N-1}$$

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} N & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

luego es una base ortonormal al dividir por $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

$$X = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \langle X, \phi_n \rangle \phi_n$$ y la coordenada

k esima en la base canonica es

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(n)\, e^{\frac{2\pi i n k}{N}}$$

Pero se puede introducir desde un punto de vista más teórico.

~~tons~~ los vectores de N coordenadas periódicos en realidad son funciones en $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. ~~El~~ El conjunto de funciones es claramente un espacio vectorial de dimensión N. Una base es $\{\delta_\alpha\}$ ortonormal. Si le doy el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(a) \overline{g(a)} ,$$

entonces ~~ese~~ se convierte en un espacio unitario, osea espacio euclídeo sobre $\mathbb{C}$ de dim. finita. La base δ_α es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

Por otro lado se definen los caracteres o ~~fea~~ homomorfismos de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$

Como todo elemento divide al orden del grupo en realidad la imagen son raices n-esimas de la unidad.

La transformada DFT se define como

$$F(N): L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow L^2(\widehat{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})$$

$$(F(N) f)\hat{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(a) \lambda(a)$$

que tiene que ver esto con la transformada que hemos definido.

La aplicación $a \longrightarrow e^{\frac{2\pi i a \cdot}{N}}$

es un isomorfismo de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en $\widehat{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$

con lo que ~~podemos ver~~ identificar $L^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ con $L^2(\widehat{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})$

en este caso

$$(F(N) f)(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(a) e^{\frac{2\pi i n a}{N}}$$

que es la transformada que hemos definido

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

3

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ______ de ______

DNI

En este sentido, $F(n)$ es un operador lineal y podemos ver que ~~base base en~~ matriz tiene en la base $\{ \delta_\alpha \}$

$$(F(n)\delta_\alpha)(u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \delta_\alpha(a) e^{+2\pi i \frac{a u}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{+2\pi i \frac{\alpha u}{N}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_\alpha$$

la matriz es $\frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ e^{+2\pi i \frac{\alpha\beta}{N}} \right\}_{0 \leq \alpha, \beta \leq N-1}$

$$F^2(n) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 1 & & & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{\alpha\beta}{N}} e^{+2\pi i \frac{\gamma\beta}{N}} = \begin{cases} 1 & \alpha = \gamma \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$N-1$ cambio por 1 $N-2$ cambio por 2 etc

$e^{2\pi i xy/N}$ $\qquad$ $d_{ad}(S) = \}$ $1 \cdot 3 \geq 4\alpha$

el polinomio característico de esta matriz es

$$(\lambda-1)^{\frac{n+1}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n-1}{2}} \qquad n \text{ impar}$$

$$(\lambda-1)^{\frac{n+2}{2}}(\lambda+1)^{\frac{n-2}{2}} \qquad n \text{ par}$$

Si desarrollo por la penúltima columna para n impar

$$F^2_{(n+1)} = (1-\lambda)F^2_{(n)}$$

para n par por la última queda

$$F_{(n+1)} = -\frac{F_{(n)}}{\cancel{\lambda}-\lambda} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda}F_{(n)} = (\lambda+1)F_{(n)}$$

por inducción. ~~Así que los au~~

$$F^4_{(n)} = Id$$

luego los autovalores son ± 1, $\pm i$ y el problema que falta es saber su multiplicidad.

Eso en realidad es equivalente a saber la traza pues $Tr\, F(N) = (m_1 - m_2) + i(m_3 - m_4)$

y se que $m_1 + m_2 = \frac{N+1}{2}$

$m_3 + m_4 = \frac{N-1}{2}$

Esta cuenta se puede ver de otra manera

$$F(N) f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{N}} f_\alpha$$

$$(F(N) f_\alpha)(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} e^{\frac{-2\pi i a\alpha}{N}} e^{\frac{-2\pi i a n}{N}}$$

$$= \cancel{\frac{1}{N}} \sqrt{N} f_{-\alpha}$$

Luego $F(N)^2 = f_{-\alpha}$ que en la base f_α tiene la matriz que hemos descrito y claro $F(N)^4 = Id.$

Además

$$\langle F(N) f_{\alpha}, F_N f_{\beta} \rangle = \frac{1}{N} \langle \lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta} \rangle = \delta \langle d_{\alpha}, d_{\beta} \rangle$$

de luego $F(N)$ es un operador unitario de orden 4.

Calcular el problema de los autovalores es calcular su traza pero quien es su traza $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} e^{2\pi i \alpha^2/N}$

donde aparece una relación con el símbolo de legendre

<u>Lema</u> $\left(\frac{u}{p}\right) \sum_{\alpha=0}^{\alpha-1} e^{2\pi i \alpha^2/p} = \sum_{\alpha=0}^{p-1} e^{2\pi i u\alpha^2/p}$

~~Dem~~ $\sum_{\alpha=0}^{p-1} \left(1+\left(\frac{\alpha}{p}\right)\right) e^{2\pi i \alpha u/p} = \sum_{\alpha=0}^{p-1} \left(\frac{\alpha}{p}\right) e^{2\pi i \alpha u/p}$

$= \left(\frac{u}{p}\right) \sum_{\beta=0}^{p-1} \left(\frac{\beta}{p}\right) e^{2\pi i \beta/p}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

5

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ______ de ______

DNI

El simbolo de Legendre es tomamos el grupo $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. ~~y el subgrupo de indice 2~~

Es un grupo cíclico: Todo polinomio tiene como mucho d soluciones sobre un cuerpo

$$\sum_{d|n} \psi(d) = n \Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = \varphi(n) \quad \boxtimes$$

tiene $\varphi(p-1)$ raices primitivas. En este grupo tomo el subgrupo de indice 2 $S=\{\xi^2 : \xi \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*\}$

Tomo el homomorfismo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \to \{1,-1\}$

con nucleo S.

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \cancel{\phi} \\ \cancel{\phi} \\ 0 \end{array} \right\}$$

esto me induce a pensar una relación al multiplicar por enteros. Efectivamente veremos por ejemplo que

<u>Lema</u>:

$$Tr(F(4p)) = 1+i \Rightarrow Tr(F(p)) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \mod 4 \\ i & p \equiv 3 \mod 4 \end{cases}.$$

Para ello hay que multiplicar por numeros coprimos con p. El grupo $\left(\mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}}\right)^{*}$ actua en $\ell\left(\mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}}\right)$ por multiplicacion, dandome un automorfismo puedo definir una representación en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$

$$\rho(a)f(s) = f(sa)$$

Ahora bien $\rho_a f_\alpha(s) = f_\alpha(sa) = f_{a^{-1}\alpha}(s)$

luego es una operador unitario y

$$\rho : \mathbb{Z}/_{N\mathbb{Z}} \to U(n)$$

es un homomorfismo luego me define una representación fiel del grupo.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

6

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ______ de ______

DNI

Ahora puedo considera

$$F(n)\rho(a)F(n)^{-1}(\delta_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N}}F(n)\rho(a)\lambda_{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt{N}}F(N)\lambda_{-a\alpha}$$

$$= \delta_{a\alpha} = \rho(a^{-1})$$

$$\mathrm{Tr}(\rho(a)F(n)) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{2\pi i a\alpha^2/n}$$

$$\mathrm{Tr}(F(n)) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{2\pi i \alpha^2/n}$$

$\cancel{\mathrm{Tr}(\rho(a)F(n))} =$

El anterior lema da una relación al multiplicar por un entero. Ahora, el teorema chino del resto me permite definir una aplicación bilineal de $\ell^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})$

$$(\delta_\alpha, \delta_\beta) \longrightarrow \delta_{m\alpha+n\beta}$$

esta aplicación bilineal induce una aplicación lineal en el producto tensorial $L^2(\mathbb{R}/n\mathbb{Z}) \otimes L^2(\mathbb{R}/m\mathbb{Z})$

Os recuerdo que es el producto tensorial
Se trata de entender un espacio X a traves de las funciones sobre el. Por ejemplo para estudiar $[0,1]$ se estudia $C[0,1]$ que tiene estructura de espacio vectorial. Cuando tenemos funciones sobre un conjunto finito, como son N-muestras en puntos equidistribuidos, quien sabe como son en $X \times Y$.

$$f \otimes g\,(s,t) = f(s) \cdot g(t)$$

Toda funcion se escribe como combinacion lineal de funciones que valen 0 o 1 luego se pueden escribir como productos. Cojo el es. v. libre

$$\{ \delta_{(f,g)} : (f,g) \in V \times V \}$$

Combinaciones lineal de funciones

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

7

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Pàgina ____ de ____

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

DNI

pero entonces

$$\delta(af_1+bf_2, g) = a\delta(f_1, g) + b\delta(f_2, g)$$

luego lo pongo estas relaciones y formo el producto tensorial

Ahora $A \otimes B$ lo puedo entender como

$A_1 \quad B_1 \dots B_m$

A_n

$$A_i B_j = \sum a_i f_i \otimes \sum b_j g_j = \sum a_i b_j \, f_i \otimes g_j$$

tiene por matriz

$$\begin{matrix} a_{11} B & a_{1n} B \\ a_{n1} B & a_{nn} B \end{matrix}$$

$$tr(A \otimes B) = Tr(A) \cdot tr B$$

No hay mas que multiplicar por ver que

$$\rho(n)\, F(m) \otimes \rho(m)\, F(n) = F(nm)$$

luego $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \operatorname{tr} F(p) \operatorname{Tr} F(q) = \operatorname{Tr}(F(pq))$

Demostrar ala ley de reciprocidad cuadratica

en

Teorema. $$\operatorname{Tr}(F(n)) = \begin{cases} (1+i) & \text{if } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 & n \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & n \equiv 2 \pmod 4 \\ i & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

8

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

DNI

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Pàgina ____ de ____

$\rho(p)F(q) \otimes \rho(q)F(p) = F(pq)$ sale de mirar la matriz que corresponde al producto tensorial.

La aplicación que a cada $(\delta_\alpha, \delta_\beta) \longrightarrow \delta_{\alpha m + \beta n}$ es un isomorfismo claramente.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) \mathrm{Tr}(F(q))\, \mathrm{Tr}(F_p) = \mathrm{Tr}(F_{pq})$$

luego con encontrar la fórmula de la traza hemos terminado.

Teorema

$$\mathrm{Tr}(F(n)) = \begin{cases} 1+i & n \equiv 0 \pmod 4 \\ 1 & n \equiv 1 \mod 4 \\ 0 & n \equiv 2 \pmod 4 \\ i & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

El tercer caso es trivial

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i r^2}{2n}} = \sum_{0 \leq r < n} e^{\frac{2\pi i r^2}{2n}} + \sum_{0 \leq r < n} e^{\frac{2\pi i (r+n)^2}{2n}}$$

$$= 0$$

$$e^{\frac{2\pi i r^2}{2n}} e^{\pi i n} e^{2\pi r} = -e^{\frac{2\pi i r^2}{2n}}$$

Lema Si $\mathrm{Tr}(4p) = 1+i \Rightarrow \mathrm{Tr}(p) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \ (4) \\ i & p \equiv 3 \ (4) \end{cases}$

$$\underbrace{\mathrm{Tr}(e(4) F(p))}_{= \mathrm{Tr}(F(p))} \cdot \underbrace{\mathrm{Tr}(e(p) F(4))}_{= \begin{cases} (1+i) & p \equiv 1 (4) \\ (1-i) & p \equiv 3 (4) \end{cases}} = \mathrm{Tr}(F(4p))$$

$\square$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

9

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Pàgina ____ de ____

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

DNI

Dos demostraciones una de Schur sólo para el caso primo impar, y otra de Dirichlet

<u>Lema</u> $Tr(F(p)) = \begin{cases} \pm 1 & p \equiv 1 \pmod 4 \\ \pm i & p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

Considero los caracteres multiplicativos, es decir homomorfismos de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \to \mathbb{C}(p-1)$ $\quad \lambda(0)=0$

Sé que $\frac{1}{\sqrt{p}}\lambda_\alpha$ forman una base ortonormal, luego

$$\lambda(a) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=0}^{p-1} \langle \lambda, \lambda_\alpha \rangle \lambda_\alpha(a)$$

$$\sum_{\alpha=0}^{p-1} \lambda(c)\langle \lambda, \lambda_\alpha\rangle \lambda_\alpha = \lambda(cx) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=0}^{p-1} \langle \lambda, \lambda_\alpha \rangle \lambda_\alpha(cx) = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=0}^{p-1} \langle \lambda, \lambda_{c^{-1}\alpha} \rangle \lambda_\alpha(x)$$

luego $a_{c^{-1}\alpha} = \lambda(c)\, a_\alpha$ luego todos tienen el

$\boxed{\lambda \text{ no trivial}}$

mismo modulo

$$p-1 = \langle \lambda, \lambda \rangle = \sum_{\alpha=1}^{p-1} |a_\alpha|^2 = p(p-1)\,|a_1|^2$$

$$|a_1| = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Si tomo por λ el simbolo de Legendre, queda

$$a_1 = \frac{1}{p} \left\langle \left(\frac{n}{p}\right), \lambda_1 \right\rangle = \sum_n \left(\frac{n}{p}\right) e^{2\pi i \frac{n}{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{Tr}(F(p)) = 1$$

luego $|\operatorname{Tr}(F(p))| = 1$

Pero $\overline{\operatorname{Tr}(F(p))} = \left(\frac{-1}{p}\right) \operatorname{Tr}(F(p))$

luego $\left(\operatorname{Tr} F(p)\right)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ $\boxtimes$

Calculamos el signo.

$m_1 - m_2 = \pm 1 \qquad m_3 - m_4 = 0 \qquad p \equiv 1 \pmod 4$

$m_1 - m_2 = 0 \qquad m_3 - m_4 = \pm 1 \qquad p \equiv 3 \pmod 4$

$$\det(F(p)) = (-1)^{m_2}\, i^{m_3}\, (-i)^{m_4}$$

$$A = \det\left(e^{2\pi i \alpha\beta/p}\right) = p^{p/2} \det F(p)$$

10

es un determinante vandermonde

$$\prod_{0\le s<r<p}\left(e^{2\pi i r/p}-e^{2\pi i s/p}\right) = \prod_{0\le s<r<p} \eta^{r+s}\prod\left(\eta^{r-s}-\eta^{-(r-s)}\right)$$

$\eta = e^{\pi i/p}$

$$= \eta^{\sum_{0\le s<r<p}(r+s)} \prod_{0\le s<r<p} 2i\,\mathrm{sen}\,(r-s)\frac{\pi}{p} = 2^{\frac{p(p-1)}{2}}\, i^{\frac{p(p-1)}{2}}\, E(p)$$

$$A^2 = p^p \det F^2(p) = p^p(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$$

$$A = \pm p^{p/2}\, i^{\frac{p(p-1)}{2}} \quad \text{debe ser} \quad i^{\frac{p(p-1)}{2}} = \det(F(p))$$

$$= (-1)^{m_2} i^{m_3}(-i)^{m_4} \Rightarrow i^{\frac{p(p-1)}{2}-m_3-m_4} = (-1)^{m_2+m_4}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} - m_3 - m_4 \equiv 2m_2+2m_4 \mod 4$$

$$\frac{p(p-1)}{2} \equiv 2m_2+m_3-m_4 \pmod 4$$

Si $p\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow m_1+m_2 = \frac{p+1}{2}$ ~~$\equiv 1$~~ $(\mathrm{mod}\,4) \Rightarrow 2m_2+1 \equiv \frac{p+1}{2} \mod 4$

$\frac{(p-1)}{2}p \;\; p \neq 4$ $\qquad \frac{p(p-1)}{2} \equiv 2m_2 \equiv \frac{p+3}{2} \mod 4$

$$\frac{p(p-1)}{2} - \frac{p+1}{2} \equiv 0\,(4)$$

$$\frac{p+1}{2}(p-1) - 2 \equiv 0\,(4)$$

Demostración de Dirichlet

Considero la función

$$f(x) = e^{2\pi i x^2/n} \quad ; \quad f(x+k) = f_k(x) \qquad k=0,\dots,n-1$$

$$f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_k(0)+f_k(1)\right) = \sum_m c_m \, e^{2\pi i m x}$$

$$= \sum_m \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{(x+k)^2}{n}} e^{-2\pi i m x} \, dx$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f_k(0)+f_k(1)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2\pi i \frac{k^2}{n}} + e^{2\pi i\frac{(k+1)^2}{n}}\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{2\pi i k^2/n} = \sqrt{n}\,\operatorname{Tr} F(n)$$

$$\sum_m \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{1+k} e^{2\pi i \frac{u^2}{n} - 2\pi i m u} \, du$$

$$= \sum_m e^{-\pi i \frac{m^2 n}{2}} \int_0^n e^{\frac{2\pi i}{n}\left(u - \frac{mn}{2}\right)^2} du$$

$$\sum_{m \text{ par}} e^{-\pi i m^2 \frac{n}{2}} = 1 \quad ; \quad m \text{ impar } e^{-\pi i \frac{n}{2}} = i^{-n}$$

$$\sum_m \int_0^n e^{\frac{2\pi i}{n}(u-mn)^2}\,du \qquad \begin{array}{l} u-2mn=y \\ du=dy \end{array}$$

$$= \sum_m \int_{-2mn}^{-(2m-1)n} e^{2\pi i \frac{y^2}{n}}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \frac{y^2}{n}}\,dy$$

$$\int_A^B e^{2\pi i \frac{y^2}{4n}}\,dy \underset{\substack{y^2=t \\ 2y\,dy=dt}}{=} \int_{\sqrt{A}^2}^{\sqrt{B}^2} \frac{e^{\frac{2\pi i t}{n}}}{2\sqrt{t}}\,dt = \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{2\sqrt{t}} = u \\ e^{\frac{2\pi i t}{n}}dt = dv \end{array}$$

$$\frac{n}{4\sqrt{t}\pi i}\Bigg|_{\sqrt{A}^2}^{B^2} - c\int_{A^2}^{B^2} \frac{e^{\frac{2\pi i t}{n}}}{t^{3/2}}\,dt = O\left(\frac{1}{A}\right)$$

luogo a convergente

$$\frac{y}{\sqrt{b}} = u$$

$dy = \sqrt{b}\, du$ quindi

~~$\sqrt{n}\, Tr(F(n)) =$~~

$$\sqrt{b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i u^2} du = I_b$$

$$\sqrt{n}\, Tr\, F(n) = (1+i^{-n})\, \sqrt{n}\, I$$

$$I = \frac{1}{1+i^{-1}}$$

$$\boxed{Tr(F(n)) = \frac{1+i^{-n}}{1+i^{-1}}}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

1

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ____ de ____

DNI

~~Tomamos~~ Se trata de entender un objeto a traves de las funciones que actuan en el por ejemplo la representación de un grupo abstracto, o una curva elíptica: Una variedad algebraica proyectiva lisa de dimensión 1 la dimensión ~~viene~~ viene dada por el grado de trascendencia del cuerpo de funciones sobre el cuerpo base. Pero a que usando funciones se convierte en

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

Cuando tenemos un conjunto finito el conjunto de funciones definidas en $\mathbb{C}$, es un espacio vectorial de dimensión el tamaño del conjunto. Una base es δ_s que vale 1 en s y cero en el resto la pregunta que queremos resolver es como encontrar las funciones de $X \times Y$ dadas las de X y las de Y. Hay funciones que se pueden ver de forma trivial

$$f \otimes g(s,t) = f(s) \cdot g(t)$$

Pero como toda función en $X \times Y$ se puede escribir como combinación lineal de funciones que valen cero en todas partes salvo en un punto

$$f_s \otimes g_t(a,b) = \begin{cases} 0 & (a,b) \neq (s,t) \\ 1 & (a,b) = (s,t) \end{cases}$$

$$f = \sum \alpha_s f_s \otimes \sum \beta_t g(t) = \sum \alpha_s \beta_t f_s \otimes g_t$$

$$H = \begin{cases} 1 & (2,1) \\ 5 & (1,3) \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad (1,2,3,4) \times (1,2,3)$$

$$f(s) \cdot g(t) \quad (2,1) = f(2) \cdot g(1) = 1$$

$$(2,2) = f(2) \cdot g(2) = 0 \qquad g(2) = 0$$

$$(2,3) = f(2) \cdot g(3) = 0$$

$$1 f_2 g_1 + 5 f_1 g_3 \qquad (1,3) = f(1)\, g(3) = 5$$

2

Pues ya esta tomo todas las combinaciones lineales de las funciones $\{f \otimes g\}$ bueno esto son símbolos que puedo llamar $\{\delta_{(f,g)}\}$ y que representan funciones en $S \times T$. pero claro

$$(af_1 + bf_2) \otimes g = af_1 g + bf_2 g$$

luego deberíamos tener $\delta_{(af_1+bf_2, g)} = a\delta_{(f_1,g)} + b\delta_{(f_2,g)}$,

Así que si lo imponemos

$$Z = \langle \delta_{(af_1+bf_2,\, cg_1+dg_2)} - ac\delta_{(f_1,g_1)} - ad\delta_{(f_1,g_2)} - bc\delta_{(f_2,g_1)} - bd\delta_{(f_2,g_2)} \rangle$$

$$F/Z \cong V \otimes W$$

$$(af_1 + bf_2) \otimes g = af_1 \otimes g + bf_2 \otimes g$$

Si $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = V$; $\langle y_1, \dots, y_m \rangle = W$ entonces

$\cancel{x_1, \dots, x_n}$ $\{\langle x_i \otimes y_j \rangle\}$ es base de $V \otimes W$

$$f \otimes g = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{(f_i, g_i)} + Z$$

$$a_1(f_1 \otimes g_1) + \cdots + a_n(f_n \otimes g_n)$$

$$= a_1 \left(\sum c_{1j} f_j\right) \otimes \sum c_{1k} f_k + \cdots + a_n \sum c_{nj} f_j \otimes \sum c_{nk} f_k$$

$$= \sum_{j,k,l} a_l c_{l j k} f_j \otimes f_k$$

$$\sum \alpha_{ij} f_i \otimes g_j = 0 \ \ f \otimes g_j$$

puedo pensarlo como funciones todo e.v. de dim finita lo es luego $f_i \otimes g_j (i,j) = \alpha_{ij} = 0$ $\square$

Así podemos multiplicar vectores y matrices $(u_1, \ldots, u_n) \otimes (v_1, \ldots, v_n) = \sum v_i x_i \otimes \sum w_j y_j$

$$= \sum v_i w_j x_i \otimes y_j \quad \text{todos por todos}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} B & \cdots & a_{1n} B \\ a_{n1} B & & a_{nn} B \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}\, A \cdot \mathrm{tr}\, B$$

Producto Tensorial Entender un espacio mediante las funciones sobre el. $[0,1]$ $C[0,1]$ es un espacio vectorial

Dados dos espacios cuales son las funciones en $X \times Y$. Dos espacios vectoriales de dimensión finita.

Para cada pareja de funciones yo tomo

$$f \otimes g_{(s,t)} = f(s)\, g(t)$$

Toda funcion se puede escribir como combinación lineal de funciones producto

$$\sum_{\alpha \in} a_{\alpha\beta} f_\alpha(s) g_\beta(t)$$

$V \otimes W$ combinaciones lineales de (f,g)

$$\{ \delta_{(f,g)} : (f,g) \in V \times W \}$$

$\alpha_1 \delta_{(f_1, g_1)} \cdots + \alpha_n \delta_{(f_n, g_n)}$

$\alpha_1 f_1(s) g_1(t) + \cdots + \alpha_n f_n(s) g_n(t)$

$\delta_{af_1 + bf_2, g} \neq a\delta_{(f_1, g)} + b\delta_{(f_2, g)}$

(f_α, g_β) es una base de $V \otimes W$

$f \otimes g \qquad v \otimes w = v(s)w(t)$

$A \otimes B \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} \qquad a_1(b_{11} \cdots b_{1n})$

$n \times m$

$\begin{matrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{n1}B & a_{nn}B \end{matrix}$

$f \otimes g = \sum a_i f_{\alpha_i} \otimes \sum b_i g_{\beta_i}$

$= \sum a_i b_j \, f_{\alpha_i} \otimes g_{\beta_j}$

$tr(A \otimes B) = tr A \cdot tr B$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

1

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

DNI

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Pàgina ______ de ______

Dirichlet

$$\tau(\chi) = \sum_{0}^{p-1} \chi(n)\, e^{\frac{2\pi i n}{p}}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt$$

luego

$$\pi^{-\frac{s}{2}} q^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x/q}\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx$$

$$\pi^{-s/2} q^{s/2} L(s,\chi) = \int_0^\infty x^{s/2-1} \sum_{n\geq 1} \chi(n) e^{-n^2\pi x/q}\, dx$$

$$\psi(x,\chi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \chi(n)\, e^{-n^2\pi x/q}$$

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\bar{\chi})} \sum_{0}^{p-1} \bar{\chi}(m)\, e^{\frac{2\pi i m n}{q}}$$

$$|\chi(n)|^2 |\tau(\chi)|^2 = \sum_{h_1} \sum_{h_2} \chi(h_1)\overline{\chi}(h_2)\, e_q(n(h_1-h_2))$$

$$\chi(n)\tau(\overline{\chi}) = \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m)\chi(m)\, e_q(m) = \sum_{m=1} \overline{\chi}(m)\, e_q(mn)$$

$$|\tau(\chi)|^2\phi(q) = \sum_{n=1}^{q-1} |\chi(n)\tau(\chi)|^2 = q\sum|\chi(n)|^2 = q\,\phi(q)$$

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\overline{\chi})} \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m)\, e\left(\frac{mn}{q}\right)$$

$\chi(-1) = 1$

$$\tau(\overline{\chi})\psi(x,\chi) = \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m) \sum_{n} e^{-\pi n^2 x/q + 2\pi i mn/q}$$

$$\sum_{n} e^{-(n+\alpha)^2 \frac{\pi}{x}} = x^{1/2} \sum_{n} e^{-n^2\pi x + 2\pi i n\alpha}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right) \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi}(m) \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_{n} e^{-(n+\frac{m}{q})^2 \frac{\pi q}{x}}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

2

- [ ] E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
- [ ] E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona
- [ ] Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ______ de ______

DNI

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_{m=1}^{q} \overline{\chi(m)} \sum_{n} e^{-(nq+m)^2 \frac{\pi}{qx}}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_{n} e^{-e^2 \frac{\pi}{qx}} \overline{\chi}(e)$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \Psi(x^{-1}, \overline{\chi})$$

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{s/2-1} \Psi(x,\chi)\,dx + \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-1} \Psi(x^{-1},\chi)\,dx$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{s/2-1} \Psi(x,\chi)\,dx + \frac{q^{1/2}}{\tau(\overline{\chi})}\int_1^\infty x^{-s/2-1/2} \Psi(x,\overline{\chi})\,dx$$

$$\xi_1(1-s) \qquad \frac{\tau(\overline{\chi})}{q^{1/2}} \qquad \tau(\chi)\tau(\overline{\chi}) = q$$

$$\frac{q}{\tau(\overline{\chi})}$$

$$F(1-s) = \frac{\ \cdot\ ^{1/2}}{\ \cdot\ } F(s)$$

Curvas elípticas parametrizo el círculo
intento parametrizar una curva de genero 1
y no puedo porque me sale irracional.
Si tengo 2 sale. Estructura de grupo.
Puedo intentar el principio local-global
pero $3x^3+4y^3+5z^3=0$ me lo impide.
a pesar de ello tiene que dar mucha
información. Considero

$$a_p = p+1 - |E(\mathbb{F}_p)|$$

esto es el error que se comete al aproximar
el numero de puntos por $p+1$. la mitad
serán cuadrados $\frac{p-1}{2}$ ~~...~~ $3+p-3+1$

$$y^2 = x^3 - 1 \qquad p \equiv 2 \pmod 3$$

recorre todos los elementos luego hay $1+2\cdot\frac{p-1}{2}+1$

El numero de puntos sobre $\mathbb{F}_p$ viene dado por las soluciones de $(x^p - x, y^p - y)$. Considero el Frobenius $y^2 = x^3 + ax + b$ $\quad (y^2 - (x^3+ax+b))^p = 0$

$\deg(\phi_p - I)$. El tamaño del nucleo que son las antiimagenes del polinomio.

Se puede demostrar que es un morfismo a cuatro luego multiplicas por r tiene grado r^2 el cuadratico en este caso queda

$$0 \leq \deg(r\phi_q - s) = r^2 \deg \phi_q + s^2 \deg(-1) + rs(\deg(\phi_q - 1) - \deg \phi_q - \deg)$$

$$0 \leq x^2 q + 1 + ax \qquad -a \pm \sqrt{a^2 - 4q}$$

$$a^2 - 4q \leq 0$$

error pequeño. $x^2 + ax + p$ $\quad 1 - ap^{-s} + p^{1-2s}$

$$L(E,s) = \prod_{p \nmid \Delta} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}$$

$$(1 - \alpha p^{-s})(1 - \bar{\alpha} p^{-s}) \qquad \prod \frac{1}{(1-\alpha p^{-s})} \frac{1}{(1 - \bar{\alpha} p^{-s})}$$

$\prod (1 - \alpha p^{-s})$ converge

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

2

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

DNI

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Pàgina ______ de ______

<u>Teorema</u> $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge en $s = s_0 \Rightarrow$

converge en $\operatorname{Re}(s) > s_0$ por partes

<u>Teorema</u> $\prod(1-a_n)$ abs conv $\Rightarrow$ conv

$\Leftrightarrow \sum a_n$ conv.

$\prod (1-\alpha p^{-s})^{-1}$ es convergente en $\operatorname{Re} s > 3/2$.

el cero ~~orden~~ de la función L

en $s=1$ es el rango de la

curva elíptica

$\prod(1+p^{-1}) = \infty$

$\sum \frac{1}{p_n} \sim \infty$

$$\frac{}{1 - a_p p^{-1} + p^{-1}} = \frac{p}{p - a_p + 1} \sim \frac{p}{|E(\mathbb{F}_p)|} \quad \frac{p}{p \pm \sqrt{p}}$$

$p+\sqrt{p}$ $p-\sqrt{p}$

p^2-p

$\sum \frac{1}{p^k}$ que a divergente osea que tiende a cero y tendrá mas puntos modulo p si tiene infinitos puntos modul racionales

Esta ecuación en realidad se puede ver que es la transformada de Mellin de una forma modular y por tanto tiene ecuación funcional.

Dos conjeturas importantes son

$$\frac{a_p}{2\sqrt{p}} = \cos\theta$$

la distribución de eso angulos sigue la ley

$$\left\{ p \le x : \frac{a_p}{2\sqrt{p}} \le a \right\} \sim \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{a} \sqrt{1-x^2}\, dx \ \pi(x)$$

distribución uniforme en el circulo

distribución uniforme sobre el circulo !!

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

3

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ____ de ____

DNI

en el cas de Lang-Trotter en que estan uniformement distribuïdes

$$\#\{p \leq x : a_p = r\} \sim c \frac{\sqrt{x}}{\log x}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ______ de ______

DNI

La ecuación funcional de la función theta

en

$$\sum e^{-\pi(n+\alpha)^2/x} = x^{1/2} \sum e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha}$$

$$\chi(n)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{m=0}^{q-1} \bar{\chi}(n)\bar{\chi}(m)\, e^{2\pi i m/q}$$

$t = n^2\pi x/q$

$$= \sum_{m=0}^{q-1} \bar{\chi}(m)\, e^{2\pi i n m/q}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}$$

$$\pi^{-s/2} q^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty x^{s/2-1} e^{-n^2\pi x/q}\, dx$$

n

$$\pi^{-s/2} q^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \int_0^\infty x^{s/2-1} \sum_1^\infty \chi(n) e^{-n^2\pi x/q}\, dx$$

$\chi(-1) = 1$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{s/2-1}\, \psi(x,\chi)$$

$$\tau(\bar{\chi})\psi(x,\chi) = \sum \tau(\bar{\chi})\chi(n) e^{-n^2\pi x/q} = \sum_{m=0}^{q-1} \bar{\chi}(m) \sum_n e^{-n^2\pi x/q + 2\pi i n m/q}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{q-1} \bar{\chi}(m) \sum e^{-\pi\left(n+\frac{m}{q}\right)^2 \frac{q}{x}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(n)\, e^{-\pi (qn+m)^2 \frac{1}{xq}}$$

$$= \sum_{\ell} \bar{\chi}(\ell)\, e^{-\pi \ell^2 / xq} = \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \psi(x^{-1}, \bar{\chi})$$

$$\int_1^\infty x^{s/2-1} \psi(x,\chi)\,dx + \cancel{q^{1/2}} \int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-1} \psi(x^{-1},\chi)\,dx$$

$$= \int_1^\infty \qquad + \quad \frac{q^{1/2}}{\tau(\bar{\chi})} \int x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} \psi(x,\bar{\chi})$$

$s\ (1-s)$

$$= \frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)} \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x,\chi) + \int_1 x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}} \psi(x,\bar{\chi})$$

$$= \frac{q^{1/2}}{\tau(\chi)} \quad S$$

$$\overline{\tau(\chi)} = \tau(\bar{\chi})$$

$$\frac{\overline{\chi(u)}}{\sum \overline{\chi(n)}\, e^{+2\pi i n/q}}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

Pàgina ______ de ______

DNI

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s/2-1}\, dt \qquad t = n^2\pi x/q \qquad t = cx$$

$$\int_0^\infty e^{-n^2\pi x/q} \; n^s \qquad c^{s/2}\int_0^\infty e^{-cx} x^{s/2-1}\, dx$$

$$n^s \left(\frac{\pi}{q}\right)^{s/2} \int_0^\infty e^{-n^2\pi x/q} x^{s/2-1}\, dx$$

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)^{s/2} \Gamma(s/2) n^{-s}$$

$$\pi^{-s/2} q^{s/2} \Gamma(s/2) L(s,\chi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{s/2-1} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x/q}$$

$$\tau(\bar{\chi})\psi(x,\chi) = \sum_{m=0}^{q-1} \bar{\chi}(m) \sum e^{-n^2\pi x/q + 2\pi i m n/q}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{q-1} \bar{\chi}(m) \sum e^{-\left(n+\frac{m}{q}\right)^2 \frac{\pi q}{x}}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum \bar{\chi}(m)\, e^{-(qn+m)^2 \frac{\pi}{xq}}$$

$$\left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum \bar{\chi}(l)\, e^{-l^2 \pi/xq}$$

$$\sum e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} = x^{1/2} \sum e^{-n^2\pi x + 2\pi i n\alpha}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \psi(x^{-1}, \bar{\chi})$$

$$\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-1}\,\psi(x^{-1},\chi) = \frac{\tau(\chi)}{q^{1/2}}\int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\,\psi(x,\bar{\chi})\,dx$$

$$\psi(x^{-1},\chi) = \tau(\bar{\chi})\,\psi(x,\bar{\chi})\left(\frac{x}{q}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,\psi(x,\bar{\chi}) + \frac{\tau(\bar{\chi})}{q^{1/2}}\int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\,\psi(x,\bar{\chi})\,dx$$

$$\frac{\tau(\chi)}{q^{1/2}}\left(\frac{q^{1/2}}{\tau(\bar{\chi})}\int \quad + \int x^{s/2-1}\,\psi(x,\chi)\right.$$

La ecuación funcional de la función theta es

$$\sum e^{-\pi(n+\alpha)^2/x} = x^{1/2} \sum e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n \alpha}$$

$$\bar{\chi}(m)\tau(\bar{\chi}) = \sum \bar{\chi}(n)\, e^{2\pi i m n/q}$$

$$\phi(q) = |\chi(m)|^2 |\tau(\chi)|^2 = \sum \chi \bar{\chi}\, e^{2\pi i n(m_1-m_2)/q} = \phi(q)\, q$$

$$\pi^{-s/2} q^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-n^2 \frac{\pi}{q} x}\, x^{s/2-1}\, dx$$ sumando en n

$$\pi^{-s/2} q^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) L(s,\chi) = \int_0^\infty \sum \chi\, e^{-n^2 \frac{\pi x}{q}}\, x^{s/2-1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{s/2-1}\, \psi(x,\chi)\, dx$$

$$\tau(\bar{\chi})\psi(x,\chi) = \sum_m \bar{\chi}(m) \sum_n e^{-n^2 \pi x/q + 2\pi i m n/q}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_m \bar{\chi}(m) \sum_n e^{-\pi\left(n+\frac{m}{q}\right)^2 \frac{q}{x}}$$

$$= \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \sum_\ell \bar{\chi}(\ell)\, e^{-\pi \ell^2/xq} = \left(\frac{q}{x}\right)^{1/2} \psi(x^{-1},\bar{\chi})$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Titulació

Assignatura

Cognoms

Nom

DNI

E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona

E.T.S. d'Enginyers de Camins, Canals i Ports de Barcelona

Facultat d'Informàtica de Barcelona

Pàgina ____ de ____

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{s/2-1}\psi(x,\chi)\,dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1}\psi\left(\frac{1}{u},\chi\right)du$$

$x = \frac{1}{u}$

$dx = \frac{-1}{u^2}du$

$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{s/2-1}\psi(x,\chi) + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon(\chi)}{q^{1/2}}\int_1^\infty u^{-s/2-\frac{1}{2}}\psi(u,\bar{\chi})$$

$$= \pi^{-s/2} q^{s/2}\Gamma(s/2)L(s,\chi)$$

$s, 1-s \quad \chi \to \bar{\chi}$

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-s/2-\frac{1}{2}}\psi(x,\bar{\chi}) + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon(\bar{\chi})}{q^{1/2}}\int_1^\infty u^{s/2-1}\psi(u,\chi) = \frac{\varepsilon(\bar{\chi})}{q^{1/2}}$$

$$\pi^{-(1-s/2)} q^{1-s/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)L(1-s,\bar{\chi}) = \frac{\varepsilon(\bar{\chi})}{q^{1/2}}\pi^{-s/2}q^{s/2}\Gamma(s/2)L(s,\chi)$$

$$\frac{\varepsilon(\bar{\chi})}{q^{1/2}} = \frac{q^{1/2}}{\varepsilon(\chi)}$$