TEORÍA DE NÚMEROS. CURSO 2000/2001. HOJA 0

0. Dada el área A y la hipotenusa h de un triángulo rectángulo calcula la longitud de sus lados.
1. Probar $s_n + t_{n-1} = p_n^5$.
2. Dar una demostración algebraica y una geométrica de las identidades $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$ y $8t_n + 1 = s_{2n+1}$.
3. Probar que $t_{n+1}^2 - t_n^2$ es un cubo para todo n, así como $4t_n t_{n+2} + 1$ es un cuadrado para todo n.
4. Demostrar la identidad de Lagrange
   $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = t_n^2$.
5. Determinar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t_n}$.
6. Demostrar las identidades

$$9t_n + 1 = t_{3n+1} \quad \text{Fermat.}$$
$$25t_n + 3 = t_{5n+2} \quad \text{Fermat.}$$
$$49t_n + 6 = t_{7n+3} \quad \text{Euler.}$$

   ¿Puedes encontrar algúna más?
7. Probar $\frac{1}{3} = \cdots \frac{1+3}{5+7} = \cdots \frac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots$
8. Encontrar el coeficiente central del polinomio $f_n(x) = (1 + x + x^2)^n$, en términos de los números binomiales.
9. Demostrar que la suma de las diagonales NE del triángulo de Pascal son los números de Fibonacci.
10. Demostrar por inducción que $u_{n+1} + \cdots + u_{n+7} = 11u_{n+7}$.
11. (Torres de Hanoi) Se disponen tres estacas, en la primera de las cuales se colocan n discos concéntricos de diámetros decrecientes. Se quiere encontrar el menor número de movimientos necesarios para trasladar los discos a otra estaca, dado que en cada movimiento se puede mover un solo disco, y no se puede colocar un disco sobre otro de diámetro menor.
12. Probar $(1 + a)^n \geq 1 + na$ para todo $n \geq 1$.
13. Suponiendo que cada uno de los 18 bailarines de un salón lleva un número distinto entre 1 y 18 y que la suma de los dos componentes de cada una de las 9 parejas que se forman es un cuadrado, ¿con quién baila el 6?
14. Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + Q(n)$ donde $Q(n)$ es un polinomio de grado p con coeficientes racionales.
    (En particular $Q(n) = \frac{n^p}{2} + \sum_{k=2}^{p+1} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}$ para ciertos b_k que cumplen $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$, llamados números de Bernoulli.

TEORÍA DE NÚMEROS. CURSO 2000/2001. HOJA 1

*1. Encontrar un número compuesto que no sea poligonal de manera no trivial. ¿Hay infinitos?

*2. Demostrar que la ecuación $m + \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)$ representa una única vez cada entero positivo según m y n recorren $\mathbb{N}$.

*3. Sea $X = \{1, \cdots, n\}$ ¿Cual es el máximo números de colores que puedo utilizar para colorear $\mathfrak{P}(X)$, el conjunto de partes de X, de forma que sea cual sea la coloración existan dos subconjuntos $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ tal que $A, B, A \cup B$ y $A \cap B$ sean del mismo color?

4. Demostrar que 6 divide a $n(n+1)(2n+1)$ y a $7^n - 1$ para todo n.

5. Demostrar $(a,b)[a,b] = ab$, donde $(,)$ y $[,]$ son máximo común divisor y mínimo común múltiplo respectivamente.

6. Decimos que un entero k es una r-potencia si para algún n se tiene $k = n^r$. Demostrar que si k es una r-potencia y una s-potencia, entonces es una $[r,s]$-potencia.

7. Determinar una condición necesaria y suficiente para que la suma de los n primeros números naturales divida a su producto.

8. Encontrar tres números naturales a, b, c tal que cada uno de ellos divida la suma de los otros dos. ¿Hay infinitos trios en estas condiciones?

*9. ¿Cuantos puntos del retículo puede haber en el plano, de forma que los segmentos entre ellos no contengan otros puntos de coordenadas enteras? ¿Y en dimensiones superiores?

10. Decidir si son verdaderas o no las siguientes implicaciones entre números naturales:
    1) $a|bc \Rightarrow a|b$ o $a|c$.
    2) $a|(b+c) \Rightarrow a|b$ o $a|c$.
    3) $a^2|b^3 \Rightarrow a|b$.
    4) $a^2|c$, $b^2|c$ y $a \leq b \Rightarrow a|b$.
    5) b es el mayor cuadrado tal que $b|c$ y $a^2|c \Rightarrow a|b$.
    6) Si $a|c$, $b|c$ y $(a,b) = 1$ entonces $ab|c$.

*11. Sea $m = kd$. Demostrar que a es tal que $m|ad$ pero $m \not| ja$ para ningún $j < d$ si y solo si $k = (m,a)$.

12. Demostrar que si $a^n - 1$ es primo entonces $a = 2$ y n es primo, y si $2^n + 1$ es primo entonces $n = 2^k$.

13. Demostrar que el mínimo común múltiplo de $9n+8$ y $6n+5$ es $54n^2 + 98n + 40$ para todo entero n.

14. Demostrar los siguientes hechos sobre los números de Fermat

   1) $F_n = \prod_{i=1}^{n-1} F_i + 2$. Deducir que $(F_n, F_m) = 1$ para $n \neq m$ y de aquí la existencia de infinitos números primos.

   2) Si $F_n = rs$, entonces la máxima potencia de 2 que divide a $r-1$ y a $s-1$ coincide.

   3) Para todo $n \geq 2$, F_n termina en 7.

*15. Dar una condición necesaria y suficiente para que con dos cántaras de m y n litros respectivamente se puedan medir l litros a la orilla de un rio.

16. Encontrar una solución a las ecuaciones

   $243x + 384y = -9$

   $6x + 15y = 17.$

   $6x + 15y + 20z = 17.$