ECUACIONES Y TRANSFORMADAS, INGENIERÍA ELECTRÓNICA

JORGE JIMÉNEZ URROZ

1. Transformada de Laplace

A veces los fenómenos no aparecen dados por la función sino por la variación de la función. Por ejemplo en el siglo XIX Thomas Robert Malthus predijo que la humanidad se moriría de hambre, gracias a una ecuación diferencial. La población crece de forma proporcional a la cantidad de población en ese momento, mientras que la cantidad de alimentos sólo se podría aumentar de forma constante, es decir

$$P'(t) = pP(t)$$
$$A'(t) = a$$

la solución de la primera es $P(t) = Ce^{pt}$, mientras que la segunda es $A(t) = c + at$. Si cada individuo necesita 1 alimento, queda que $\frac{A(t)}{P(t)} = M(c + at)e^{-pt} \to 0$.

El modelo de Kermack y McKendrick para las epidemias dice que si una población se divide en sanos, infectados y recuperados, $N = S + I + R$, su evolución viene dada por las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dS}{dt} = -\gamma SI$$
$$\frac{dI}{dt} = \gamma SI - \beta I$$
$$\frac{dR}{dr} = \beta I$$

Si suponemos que no hay población sana, los infectados decrecen de forma exponencial.

Necesitamos algun método para resolver ecuaciones diferenciales.

1.1. **Definición y convergencia.**

Definición 1. *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la transformada de Laplace como*

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

También se suele denotar por $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Integrando por partes se tiene

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

transformando una ecuación diferencial en una ecuación algebraica para la función transformada. Por ejemplo la ecuación

$$P'(t) = pP(t),$$

queda

$$-P(0) + s\mathcal{L}\{P(t)\}(s) = p\mathcal{L}\{P(t)\}(s),$$

o lo que es lo mismo

$$\mathcal{L}\{P(t)\}(s) = \frac{P(0)}{s-p}.$$

Ejemplos.

La función exponencial

$$x(t) = e^{at},$$

tiene como transformada de Laplace

$$X(s) = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

que tiene sentido para todo Re$(s)>$Re(a).

Al estar definida por una integral impropia, debemos asegurarnos que la integral converge en algún sitio. De esta forma si tomamos la función $x(t) = e^{2t^2}$, entonces para cualquier $s \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_0^\infty e^{2t^2} e^{-st} dt \geq \int_s^\infty e^{t^2} dt = \infty,$$

luego la función e^{2t^2} no admite transformada de Laplace. Es conveniente restringirnos al conjunto de funciones que admiten transformada de Laplace en algún conjunto.

Definición 2. *Se dice que una función $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de orden exponencial si $f(t) = O\left(e^{\alpha t}\right)$ para algún $\alpha > 0$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. Si existe*

$$\sigma = \inf\{\alpha \,:\, f(t) = O(e^{\alpha t})\},$$

MAÑANA se dice que f tiene orden exponencial σ. Si no existe tal ínfimo el orden exponencial de la función es $-\infty$.

Ejemplos.

- Todo polinomio es de orden exponencial.
- Las funciones acotadas son de orden exponencial, por ejemplo sen(t) o cos(t).
- La exponencial es de orden exponencial.

Ejemplo. No tiene porque ser contínua para tener transformada de Laplace.

Función escalón unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

tiene como transformada de Laplace

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

Esta función sólo tiene sentido si Re$(s) > 0$.

Hay otro obstáculo para que la transformada de Laplace no converja, y es que la función tenga alguna singularidad en $[0, \infty)$. Por ejemplo la transformada de Laplace de la función $x(t) = \frac{1}{t}$ no existe, ya que la integral que define no es convergente. Sin embargo, hay veces que, a pesar de tener una singularidad, la integral converge. Así, haciendo el cambio de variable $t = u^2$, queda

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^\infty e^{-su^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Por otro lado, el logaritmo es una función que, a pesar de tener una singularidad en el cero, crece tan despacio que todavía admite transformada de Laplace. Recuerdese que

$$\int_0^\infty \log t dt = t\log t - t|_0^\infty = 0,$$

con que le la integral impropia que define la transformada de Laplace es convergente. Podemos calcularla gracias a la función Gamma. Concretamente, derivando en $\mathrm{Re}(s) > 0$ se tiene

$$\Gamma'(s) = \int_0^\infty \log t t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Evaluando en $s = 1$ queda

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty \log(t) e^{-t} dt,$$

Haciendo el cambio de variable $t = su$ queda

$$\Gamma'(1) = s\int_0^\infty \log(u) e^{-su} du + s\log s \int_0^\infty e^{-su} du,$$

con lo que en $\mathrm{Re}(s) > 0$,

$$\mathcal{L}\{\log t\}(s) = \frac{\Gamma'(1) - \log s}{s}.$$

En general nos restringimos a funciones en la clase A, de las funciones contínuas a trozos, con discontinuidades de salto y de orden exponencial.

Lema 3. *Si $f(t)$ es de orden exponencial α, entonces $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ converge en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.*

Prueba. Metiendo el valor absoluto dentro de la integral se tiene

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}(s)| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma t} dt \leq M \int_0^\infty e^{(\alpha-\sigma)t} dt = \frac{M}{\sigma - \alpha}.$$

Ejemplo. $f(t) = t^n$ es de orden exponencial $\alpha = 0$, luego en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$ se tiene, intengrando por partes

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt,$$

con lo que, para todo $n \geq 1$ se tiene $I_n = \frac{n}{s} I_{n-1}$, e iterando obtenemos

$$I_n = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

en todo el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$. En general, para cualquier $\alpha > -1$, se tiene

$$\mathcal{L}\left\{t^\alpha\right\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \tag{1}$$

1.2. **Propiedades.**

Lema 4. *La transformada de Laplace es lineal, es decir, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y toda pareja de funciones $f, g \in A$ de ordenes exponenciales $\alpha < \beta$, se tiene en Re$(s) > \beta$*

$$\mathcal{L}\left\{f+g\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{g\right\}(s).$$

Ejemplo. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la función $x(t) = \mathrm{sen}(at) = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$ tiene como transformada

$$\mathcal{L}\left\{x(t)\right\}(s) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}\left\{e^{iat}\right\}(s) - \mathcal{L}\left\{e^{-iat}\right\}(s)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{a}{s^2+a^2},$$

siempre que $\mathrm{Re}(s) > 0$. De la misma forma

$$\mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\}(s) = \frac{s}{s^2+a^2},$$

para $\mathrm{Re}(s) > 0$.

$\mathcal{L}\left\{\cosh(t)\right\}(s) = \frac{s}{s^2-b^2}$, mientras que $\mathcal{L}\left\{\mathrm{senh}(t)\right\}(s) = \frac{b}{s^2-b^2}$, ambas definidas en $\mathrm{Re}(s) > b$.

Lema 5. *Cambio de escala. Sea $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$ definida en $\sigma > \alpha$. Entonces para todo $a > 0$, se tiene*

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),$$

en $\sigma > a\alpha$.

Prueba. Haciendo un cambio de variable $at = u$ queda

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(s) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-su/a}du = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}).$$

Ejemplo. Sea $y(t) = 2^n t^n$. Entonces

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{(2t)^n\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{n!}{(s/2)^{n+1}} = \frac{2^n n!}{s^{n+1}}.$$

Lema 6. *Sea $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$, y $a > 0$. entonces*

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}(s) = e^{-as}F(s).$$

Prueba. En efecto, Haciendo el cambio $t - a = u$, queda

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\}(s) = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = e^{-sa}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du = e^{-sa}F(s).$$

Ejemplo. Sea $f(t) = \sqrt{t-1}$. Entonces, teniendo en cuenta el Lema anterior, y (1), se tiene

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = e^{-s}\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = e^{-s}\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$$

Consideramos la función $f(t)$ definida a trozos por

$$S(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & \text{si } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{si } t > 2\pi \end{cases}.$$

Entonces $f(t) = \operatorname{sen}(t)u(t) - \operatorname{sen}(t-2\pi)u(t-2\pi)$, y por tanto

$$\mathcal{L}\left\{S(t)\right\}(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} = \left(1-e^{-2\pi s}\right)\frac{1}{s^2+1}.$$

Lema 7. *Sea $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$, $a \in \mathbb{C}$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left\{e^{-ta}f(t)\right\}(s) = F(s+a).$$

Prueba. Se sigue de la definición de la transformada.
Ejemplos.

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t}\sqrt{t}\right\}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(s+1)^{3/2}}.$$

Corolario 8. *Si $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$, entonces*

$$\mathcal{L}\left\{\cos(bt)f(t)\right\}(s) = \frac{F(s+ib)+F(s-ib)}{2}$$
$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}(bt)f(t)\right\}(s) = \frac{F(s-ib)-F(s+ib)}{2i}$$

Ejemplo. Si $C(t) = \frac{\cos(bt)}{\sqrt{t}}$, y $S(t) = \frac{\operatorname{sen}(bt)}{\sqrt{t}}$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{C(t)\right\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+b^2}+s}{s^2+b^2}},$$
$$\mathcal{L}\left\{S(t)\right\}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+b^2}-s}{s^2+b^2}}$$

Para verlo, hay que tener en cuenta el corolario anterior y la identidad

$$\left(\sqrt{s+ib}+\sqrt{s-ib}\right)^2 = 2s + 2\sqrt{s^2+b^2}.$$

Para el seno la elección del signo viene dada por la definición de la función para $s > 0$.

Lema 9. *Sea $f(t)$ $k+1$ veces derivable en $\mathbb{R}^+$, con derivadas de cualquier orden en la clase A y $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\}(s) = s^kF(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0).$$

Prueba. Integrando por partes con $f'(t)dt = dv$ y $e^{-st} = u$ se tiene

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s).$$

Ejemplo. Teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}''(t) = -\mathrm{sen}(t)$, $\mathrm{sen}(0) = 0$ y $\mathrm{sen}'(0) = 1$, se tiene

$$-\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}''(t)\right\}(s) = s^2\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(t)\right\}(s) - 1,$$

de donde se obtiene la transformada de Laplace del seno.

Corolario 10.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

Prueba. Se sigue del hecho de que si $I(t) = \int_0^t f(t)dt$, entonces $I'(t) = f(t)$, con lo que

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{I'(t)\right\}(s) = s\mathcal{L}\left\{I(t)\right\}(s) - I(0),$$

de donde se sigue el resultado, pues $I(0) = 0$.

Corolario 11. *Sea $f(t)$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$ con derivada en la clase A y $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$. Entonces*

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0) \tag{2}$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t) \tag{3}$$

Prueba. Por el Lema 9 para $k = 1$ se tiene

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0).$$

Teniendo en cuenta que f' es de orden exponencial, y el Lema 3 la integral de la derecha tiende a cero cuando $s \to \infty$ lo que prueba (2). Para probar (3) intercambiamos el límite en la ecuación anterior e integramos obteniendo

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = sF(s) - f(0),$$

que es equivalente al resultado.

Una relación similar aparece al derivar la transformada de Laplace. Concretamente

Lema 12. *Sea $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = F(s)$ en $Re(s) > a$. Entonces en el mismo semiplano se tiene*

$$\mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\}(s) = (-1)^k F^{(k)}(s).$$

Prueba. El resultado es inmediato derivando bajo el signo integral en la definición de transformada de Laplace.

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \int_0^\infty t^k f(t)e^{-st}dt = (-1)^k\mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\}(s).$$

Observación 13. *El integrando en la transformada de Laplace es una función infinitamente diferenciable, con respecto de s, y sus derivadas tienen transformada convergente, con lo que la derivación bajo el signo integral está garantizada. Concretamente, $F(s)$ es una función analítica en el semiplano de convergencia.*

De nuevo, de un resultado sobre las derivadas se deduce uno sobre integrales.

Corolario 14. *Sea $f(t)$ dos veces derivable en $\mathbb{R}^+$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(s)ds.$$

Prueba. Si llamamos $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, y $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$ entonces

$$F(s) = \mathcal{L}\{tg(t)\}(s) = -G'(s),$$

y no tenemos más que integrar en el intervalo $(s, +\infty)$ para obtener

$$\int_s^\infty F(s) = G(s),$$

siempre y cuando $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$, lo cual es cierto por el Corolario 11.

Ejemplo. Sea $Si(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen} u}{u} du$. Esta función es infinitas veces derivable. Por el corolario anterior se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

Como $Si(t)' = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$, podemos aplicar ahora el Lema 9 para obtener

$$\mathcal{L}\{Si(t)\}(s) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(s)}{s} = \frac{\arctan(1/s)}{s}.$$

Existe una fórmula cerrada para la transformada de Laplace de funciones periódicas.

Lema 15. *Sea $f(t)$ periódica de periodo T, contínua a trozos en $[0, T]$. Entonces*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(u)e^{-su} du.$$

Prueba.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt,$$

y haciendo el cambio de variable $nT + u = t$, y usando que $f(t)$ es T-periódica queda

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \quad &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(u-nT)e^{-s(u+nT)}du = \sum_{n=0}^\infty e^{-sTn} \int_0^T f(u)e^{-su}du \\ &= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(u)e^{-su}du.\end{aligned}$$

Ejemplo. $f(t) = |\operatorname{sen}(t)|$ es una función acotada, por tanto de orden exponencial 0, contínua, y periódica de periodo π, con lo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-s\pi}} \int_0^\pi \operatorname{sen}(t)e^{-st}dt.$$

Para calcular la integral se puede hacer integrando dos veces por partes, o dandose cuenta de que nuestra integral es la parte imaginaria de una más sencilla.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{sen}(t)e^{-st}dt &= \operatorname{Im}\int_0^\pi e^{-(s-i)t}dt = \operatorname{Im}\frac{1}{i-s}e^{-(s-i)t}\Big|_0^\pi = \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-\pi s}+1}{s-i}\right) = \frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1},\end{aligned}$$

con lo que

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$$

En el espacio de funciones aparece una nueva operación que es la convolución.

Definición 16. *Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la convolución entre las dos como*

$$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, en las aplicaciones a EDO's es que transforma la convolcuión en el producto.

Lema 17. *Sean f y g tal que $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, $\mathcal{L}\{g\}(s) = G(s)$. Entonces*

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s),$$

en el semiplano de convergencia común a ambas.

Prueba.

$$\mathcal{L}\{f*g\}(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(u)g(t-u)due^{-st}dt = \int_0^\infty f(u)\int_u^\infty g(t-u)e^{-st}dtdu.$$

Haciendo el cambio de variable $t-u=x$ queda

$$\int_0^\infty f(u)\int_0^\infty g(x)e^{-s(x+u)}dxdu = \int_0^\infty f(u)e^{-su}du\int_0^\infty g(x)e^{-sx}dx = F(s)G(s).$$

Ejemplo. Sea $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Entonces

$$f*f(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}}d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}}du = \beta(1/2,1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Observese que, en este caso, la función convolución es la función escalon unitario, ya que la convolución es cero si $t<0$. Por otro aldo

$$\mathcal{L}\left\{(\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{(\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s)\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}(s) = \frac{\pi}{s},$$

que es la transformada de Laplace de la función $\pi u(t)$.

Aplicando la definición se tiene

$$\mathcal{L}\{\cos t * \operatorname{sen}(t)\}(s) = \int_0^t \cos(\tau)\operatorname{sen}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}(t-2\tau)d\tau = \frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t).$$

Y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$, y que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$, se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t\operatorname{sen}(t)\right\}(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Notese que esto conicide con aplicar el Lema 12 con $k = 1$ y $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(t)$.

De igual utilidad a la hora de resolver ecuaciones diferenciales es saber que la transformada de Laplace puede calcularse mediante desarrollo en serie.

Lema 18. *Sea $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ en $\mathbb{R}$. Entonces, si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!a_n} = 0$,*

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{n!a_n}{s^{n+1}},$$

en $Re(s) > 0$.

Observación 19. *Recuerdese que $\lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!a_n}$, cuando existen.*

Ejemplo. Teniendo en cuenta que $\frac{\mathrm{sen}(t)}{t} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$, e integrando término a término se tiene

$$f(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{sen}(t)}{t} dt = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

con lo que aplicando el anterior resultado se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{1}{s^{2n+2}} = \frac{1}{s}\arctan(1/s).$$

A pesar de que $f(t) = \frac{1}{t+1}$ tiene transformada de Laplace, no se puede calcular por medio del desarrollo exponencial, porque tiene radio de convergencia finito. Por otro lado, la función $f(t) = e^{t^2}$, a pesar de tener desarrollo en serie de potencias convergente en todo $\mathbb{R}$, no tiene transformada de Laplace.

1.3. **La función delta.** Estrictamente hablando, la función impulso o δ de Dirac, no es una función sino un operador que asocia a cada función $h(t)$ suficientemente buena, su valor en el cero. Usaremos la siguiente notación para ese operador.

Definición 20. *La función $\delta(t)$ se define mediante la propiedad*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)h(t)dt = h(0). \tag{4}$$

valida para cualquier función en con derivada infinitamente diferenciable.

Tomando $h(t) = 1$, se tiene la primera propiedad de la función delta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1. \tag{5}$$

Haciendo una traslación en la Ecuación (4) obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)h(t)dt = h(t_0). \tag{6}$$

Y si tomamos $h(t) = e^{-st}$, obtenemos la transformada de Laplace de la función

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}(s) = 1. \tag{7}$$

Observese que aplicando (6) a la misma función $h(t) = e^{-st}$ se obiente la propiedad de traslación para la función impulso

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)\right\}(s) = e^{-st_0},$$

y con $h(t) = e^{-st}f(s)$ deducimos para cualquier $t_0 \geq 0$,

$$\mathcal{L}\left\{\delta(t-t_0)f(t)\right\}(s) = e^{-t_0 s}f(t_0).$$

Teniendo en cuenta la definición vemos que

$$I(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u-t_0)du = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t \geq t_0, \end{cases} \tag{8}$$

con lo que $I(t) = u(t-t_0)$, la función escalon. En particular tenemos

$$u'(t-t_0) = \delta(t-t_0), \tag{9}$$

notación que da a entender la Ecuación (8). Integrando por partes en (4) tenemos, para cualquier función n veces diferenciable la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)h(t) = (-1)^n h^{(n)}(0). \tag{10}$$

Y tomando $h(t) = e^{-st}$, se tiene

$$\mathcal{L}\left\{\delta^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n.$$

1.4. **La transformada inversa.** La transformada inversa de Laplace es también un operador que, a cada función $F(s)$ apropiada, le asocia otra $f(t)$ cuya transformada de Laplace coincide con $F(s)$. Este procedimiento es posible gracias a la unicidad de la transformada de Laplace. Sin embargo, la existencia no garantiza que haya un método explícito para calcularla. En algunos casos en los que la solución son de un tipo particular, por ejemplo exponenciales complejas, que incluyen senos y cosenos la transformada inversa se puede calcular gracias a al expansión en fracciones simples.

Proposición 21. *Sea $P(s) = (s-\alpha)^n R(s) \in \mathbb{C}[s]$ un polinomio con la raíz α de multiplicidad n, y $Q(s) \in \mathbb{C}[s]$ un polinomio cualquiera. Entonces existen n constantes $k_1, \dots, k_n$, un polinomio $C(s)$ de grado menor que el grado de $R(s)$, y otro $q(s)$ tal que*

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = q(s) + \sum_{j=0}^{n} \frac{k_i}{(s-\alpha)^i} + \frac{C(s)}{R(s)}.$$

Ademas, $q(s) = 0$ si el grado de $Q(s)$ es menor que el grado de $P(s)$.

Prueba. Mediante división entre polinomios se puede encontrar $A(s)$ y $B(s)$ tal que

$$A(s)(s-\alpha)^n + B(s)R(s) = 1.$$

Multiplicando por $Q(s)$ y dividiendo por $P(s)$ queda

$$\frac{Q(s)A(s)}{R(s)} + \frac{Q(s)B(s)}{(s-\alpha)^n} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \tag{11}$$

Teniendo en cuenta la división $Q(s)A(s) = q_1(s)R(s) + C(s)$, y desarrollando $Q(s)B(s)$ en potencias de $(s-\alpha)$, $Q(s)B(s) = \sum_{i=0}^{d} k_{n-i}(s-\alpha)^i$, no hay mas que sustituir ambas cosas en la ecuación (11) para obtener el resultado con el polinomio $q(s) = q_1(s) + \sum_{i=n}^{d} k_{n-i}(s-\alpha)^{i-n}$. La última observación se obtiene restando

$$\frac{Q(s)}{P(s)} - \sum_{j=0}^{n} \frac{k_i}{(s-\alpha)^i} + \frac{C(s)}{R(s)},$$

ya que el grado de $C(s)$ es menor que el grado de $R(s)$, luego la única forma de que sea un polinomio es porque es el polinomio cero.

Debido a que cualquier función racional se describe por sus ceros y polos, existen algunos libros de circuitos que hablan de localizar los ceros y polos de la transformada de una función.

Ejemplo. Ppara encontrar el conjuntos de ceros y polos de la transformada de

$$f(t) = (e^{-10t}\cos(20t) + 2e^{-10t}\mathrm{sen}(20t))u(t),$$

recordamos que

$$\mathcal{L}\left\{(e^{-10t}\cos(20t))\right\}(s) = \frac{s+10}{(s+10)^2+20^2},$$

mientras que

$$\mathcal{L}\left\{2(e^{-10t}\mathrm{sen}(20t))\right\}(s) = \frac{40}{(s+10)^2+20^2},$$

con lo que sumando queda

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{s+50}{(s+10)^2+20^2},$$

con cero en -50 y polos en $-(10+20i)$ y $-(10-20i)$.

Para encontrar el desarrollo en fracciones simples en la práctica lo dividimos por casos. En todos ellos es suficiente con suponer que el grado de $Q(s)$ es más pequeño que el de $P(s)$ pues lo primero que hacemos es dividir. Así pues en todos los casos $q(s) = 0$.

Caso 1. Si todas las raices son simples, entonces se ha de multiplicar por $P(s) = \prod_{i=1}^{n}(s-a_i)$ para obtener

$$Q(s) = \sum_{i=1}^{n} k_i \prod_{j\neq i}(s-a_j),$$

y evaluando en cada una de las raices se obtienen los coeficientes.

Ejemplo. Desarrollar en fracciones simples la función racional $F(s) = \frac{2(2s+7)}{(s+4)(s+2)}$.
Por la proposición anterior sabemos que existen k_1 y k_2 tal que

$$F(s) = \frac{k_1}{s+4} + \frac{k_2}{s+2}.$$

Si multiplicamos a ambos lados en la igualdad por el denominador, se obtiene

$$4s + 14 = k_1(s+2) + k_2(s+4),$$

y evaluando en $s=-4$, y en $s=-2$ obtenemos $k_1 = 1$ y $k_2 = 3$.

Para encontrar la transformada inversa de $F(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^3+6s^2+11s+6}$, empezamos dividiendo el numerador entre el denominador para obtener

$$F(s) = 1 - \frac{3s^2 + 11s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la suma de los coeficientes de monomios de grado par, es igual a la suma de los coeficientes de monomios de grado impar, $s = -1$ es raíz del denominador, y resolviendo el polinomio cuadrático que queda vemos que

$$F(s) = 1 - \frac{3s^2 + 11s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Y multiplicando por el denominador en la identidad

$$\frac{3s^2 + 11s + 5}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)} + \frac{k_3}{(s+3)}.$$

obtenemos

$$3s^2 + 11s + 5 = k_1(s+2)(s+3) + k_2(s+1)(s+3) + k_3(s+1)(s+2).$$

Evaluando en $s = -2, -3$ y $s = -4$ se obtienen los valores $k_1 = -3/2$, $k_2 = 5$ y $k_3 = -1/2$, por lo que la transformada inversa es la función

$$f(t) = \delta(t) + (3/2e^{-t} - 5e^{-2t} + 1/2e^{-3t})u(t).$$

Caso 2. En el caso de que haya raices múltiples la identidad

$$\frac{Q(s)}{R(s)(s-a)^n} = \frac{1}{(s-a)^{n-1}} \left(\frac{Q(s)}{R(s)(s-a)} \right),$$

se puede utilizar para desarrollar el interior del paréntesis como si fuesen raices simples, y luego ir repitiendo el proceso.

Ejemplo. Encontrar la transformada inversa de Laplace de la función racional $F(s) = \frac{4(s+3)}{s(s+2)^2}$.

En este caso escribimos

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)} \frac{4s+12}{s(s+2)} = \frac{1}{(s+2)} \left(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+2)} \right).$$

Procediendo como en el caso anterior se obtiene $k_1 = 6$ y $k_2 = -2$, con lo que

$$F(s) = \frac{6}{s(s+2)} - \frac{2}{(s+2)^2}.$$

Y desarrollando de nuevo la primera fracción queda

$$F(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{(s+2)} - \frac{2}{(s+2)^2}.$$

Ahora solo tenemos que usar las propiedades de la transformada para obtener

$$f(t) = (3 - 3e^{-2t} - 2te^{-2t})u(t)$$

2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Una ecuación diferencial es una ecuación del estilo

$$F(x, y, y', \dots, y^{n)}) = 0.$$

El orden de la ecuación es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación. Algunos ejemplos pueden ser

$$\begin{aligned}
&y' = -kt \\
&y' + 2xy = e^{-x^2} \\
&y'' - 5y' + 6y = 0 \\
&(1 - x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0
\end{aligned}$$

a la tercera se llama ecuación de Legendre.

Es fácil comprobar que una función dada es solución de la ecuación diferencial, así por ejemplo e^{2x} y e^{3x} son soluciónes de la tercera, mientras que e^{-x^2} lo es de la segunda.

A veces las soluciones aparecen de forma implicita, como por ejemplo $xy = \log y$ es solución de

$$y' = \frac{y^2}{1 - xy}.$$

2.1. **Ecuaciones diferenciales de primer orden.**

Entre las ecuaciones diferenciales de primer orden la más sencilla se puede expresar como

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{12}$$

que se resuelve integrando en la variable x. De igual dificultad es la ecuación de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{13}$$

que queda, una vez separadas las variables

$$g(y)dy = f(x)dx,$$

e integrando nos da la solución

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

2.2. **Trayectorias Ortogonales.**

Ya sabemos que la integral puede ser muy complicada de resolver, y a veces, imposible de encontrar una solución en términos elementales. Hay algunas ecuaciones que ni siquiera tienen solución, como puede ser

$$y'^2 + 1 = 0.$$

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 22. *(Picard) Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones contínuas en un rectángulo R, entonces para cada punto interior a R existe una única curva regular solución del problema.*

La solución general $y = y(x, c)$ depende de un parámetro c que determina el punto por el que pasa la curva. Dada la ecuación de la familia de curvas se puede encontrar la ecuación diferencial

Ejemplo. Si derivamos $x^2 + y^2 = c^2$ respecto de x se obtiene

$$2x + 2yy' = 0,$$

que nos da directamente la ecuación diferencial deseada. Si la ecuación es $x^2 + y^2 = 2xc$, derivando obtenemos

$$x + yy' = c,$$

y si sustituimos c en la ecuación original obtenemos

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Definición 23. *Dos familias se dicen ortogonales si cada curva en una corta de forma perpendicular a cualquier curva de la otra familia.*

Para calcular la trayectoria ortogonal debemos cambiar la pendiente de la tangente por la pendiente de la curva ortogonal con lo que de la ecuación diferencial de las curvas originales $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales viene dada por $\frac{dy}{dx} = -1/f(x, y)$, o bien

$$-\frac{dx}{dy} = f(x, y).$$

Así en el caso de las circunferencias centradas en el origen se obtiene

$$y' = \frac{y}{x},$$

o bien

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

que integrando se obtiene

$$\log y = \log x + c,$$

o bien $y = kx$. En el segundo caso, y pasando a polares se obtiene que la ecuación de la trayectoria original es

$$\tan(\psi) = \frac{rd\theta}{dr},$$

y por tanto la trayectoria ortogonal es

$$\tan(\psi) = -\frac{dr}{rd\theta}.$$

En nuestro segundo ejemplo la ecuación en coordenadas cartesianas no es separable. Sin embargo pasando a coordenadas polares queda

$$r = 2c\cos(\theta),$$

y derivando respecto de theta y eliminando la constante obetenemos

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\cot(\theta),$$

con lo que las trayectorias ortogonales tienen por ecuación

$$\frac{rd\theta}{dr} = \tan(\theta),$$

que es una ecuación separable en las variables θ y r, e integrando nos da la solución

$$r = c\,\mathrm{sen}(\theta).$$

2.3. **Ejemplos de Ecuaciones de primer orden.**

Definición 24. *Una función se dice que es homogénea de grado n si*

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Ejemplos. Las funciones $x^2 + xy$ o $\mathrm{sen}(x/y)$. En general si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado, entonces

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

se llama una ecuación homogenea yt se puede resolver por un cambio de variable $z = y/x$, con lo que $xdz + dxz = dy$, y queda una ecuación de variables separables.

Ejemplo. La ecuación $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$ queda, después del cambio de variable

$$(1 + z)dx - (1 - z)(xdz + dxz) = 0,$$

o bien

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - z)}{1 + z^2}dz,$$

e integrando se obtiene

$$\log x = \arctan(z) - \frac{1}{2}\log(1 + z^2) + c,$$

y deshaciendo el cambio queda

$$\arctan(y/x) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + c.$$

2.4. **Ecuaciones Exactas.** Derivando una ecuación del estilo $f(x, y) = c$, nos queda

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0.$$

Definición 25. *A las ecuaciones del estilo*

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

se les llama ecuaciones exactas.

Ejemplos. La ecuación $ydx + xdy = 0$ es exacta y tiene como solución $xy = c$, mientras que $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ tiene como solución $\frac{x}{y} = c$.

Lema 26. *Una ecuación del estilo $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si y solo si*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La condición es necesaria por el Teorema de Schwarz, ya que las derivadas cruzadas deben ser iguales. Por otro lado, integrando M respecto de x se obtiene una función

$$f(x,y)=\int_0^x M(x,y)dx+g(y),$$

y derivando respecto de y se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x M(x,y)dx+g'(y)=N(x,y),$$

que sólo puede ser cierto si

$$g'(y)=N-\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x M(x,y)dx$$

Derivando respecto de x se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_0^x M(x,y)dx=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int_0^x M(x,y)dx\\ &=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0.\end{aligned}$$

2.5. **Factor integrante.** La ecuación $ydx+(x^2y-x)dy=0$ no es una ecuación exacta, ya que $\frac{\partial M}{\partial y}=1$, mientras que $\frac{\partial N}{\partial x}=2xy-1$. Sin embargo, si multiplicamos todo por $\frac{1}{x^2}$, queda $\frac{y}{x^2}dx+(y-\frac{1}{x})dy=0$, con ambas derivadas cruzadas iguales a $\frac{1}{x^2}$ y por tanto es exacta.

Definición 27. *Un factor integrante $\mu(x,y)$ para la ecuación $Mdx+Ndy=0$ es una funcion tal que $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ es una ecuación exacta.*

En realidad cualquier ecuación que aparece de la igualdad $f(x,y)=c$ admite un factor integrante. Concretamnte se tiene, derivando que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

mientras que por otro lado,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N},$$

con lo que

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{M}=\mu(x,y).$$

Observar que $\frac{\partial f}{\partial x}=\mu(x,y)M$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=\mu(x,y)N$.

Lema 28. *Una ecuación que admite un factor integrante, admite infinitos.*

Prueba. En efecto multiplicar por cualquier función de f produce un nuevo factor integrante, ya que

$$F(f)(\mu Mdx+Ndy)=F(f)df$$

e integrando se obtiene la solución $\int F(f)df=c$.

Vamos a suponer que la ecuación admite un factor integrante. Entonces

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x},$$

es decir,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Supongamos que, de las infinitas soluciones que tiene esa ecuación una solo depende de x. Entonces queda

$$\frac{d\mu}{\mu\, dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = g(x),$$

e integrando obtenemos

$$\mu = e^{\int g(x) dx},$$

En el caso de factores integrantes solo de y queda

$$\frac{d\mu}{\mu\, dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = h(y),$$

y por tanto

$$\mu = e^{\int h(y) dy}$$

2.6. **Ecuación lineal de primer orden.** Son las ecuaciones del estilo

$$\frac{dy}{dx} + py = q.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d\left(y e^{\int P dx}\right)}{dx} = \frac{dy}{dx} e^{\int P dx} + yPe^{\int P dx} = qe^{\int P dx},$$

encontramos que la solución general es

$$y = \left(\int q e^{\int P dx} dx + c\right) e^{-\int P dx}.$$

Ejemplo. Para resolver la ecuación

$$y' + y \operatorname{cotan}(x) = 2x \operatorname{cosec}(x),$$

multiplicamos por $e^{\int P dx} = e^{\int \operatorname{cotan}(x) dx} = \operatorname{sen}(x)$, con lo que nos queda

$$d(\operatorname{sen}(x) y) = 2x,$$

e integrando

$$y \operatorname{sen}(x) = x^2 + c,$$

es decir

$$y = \frac{x^2 + c}{\operatorname{sen} x}.$$

Cuando en una edo no aparece una de las variables, un simple cambio de variable reduce el orden de la ecuación. Así si en la ecuación no aparece la variable dependiente, es decir, es una ecuación del estilo

$$f(x, y', y'') = 0,$$

entonces un cambio $y' = p$ nos da $y'' = p'$ reduciendo el orden de la ecuación.

Ejemplo. Para resolver $xy'' = y' + (y')^3$, hacemos el cambio $y' = p$, con lo que queda

$$xp' = p + p^3,$$

que es de variables separables

$$\frac{dp}{p + p^3} = \frac{dx}{x},$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{p(1+p^2)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2},$$

nos queda después de integrar

$$\log p - \frac{1}{2}\log(1+p^2) = \log x + c,$$

es decir

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = cx,$$

o bien

$$\frac{1 - c^2x^2}{(cx)^2} = \frac{1}{p^2},$$

es decir

$$y' = \frac{cx}{\sqrt{1 - c^2x^2}},$$

e integrando de nuevo obtenemos

$$y = -\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2x^2} + k.$$

Si, por el contrario, falta la variable independiente, el mismo cambio nos da $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$.

Ejemplo. Consideramos la ecuación $y'' + k^2y = 0$. El cambio anterior nos da

$$pp' + k^2y = 0,$$

es decir

$$p^2 + k^2y^2 = c^2$$

o bien

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - (ky/c)^2}} = \pm c\, dx$$

e integrando se obtiene

$$\operatorname{arcsen}(ky/c) = \pm kx + b,$$

o bien $y = A\operatorname{sen}(\pm kx + b)$.

2.7. **Ecuaciones lineales de segundo orden.**

Son las ecuaciones del estilo

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x). \tag{14}$$

A diferencia de las ecuaciones de primer orden, estas no admiten un método general de resolución, y nos dedicaremos a alguna ecuacione en particular y al caso general en que los coeficientes son constantes.

Teorema 29. *Si las funciones P, Q, R son contínuas en un intervalo $[a, b]$ e y_0, y_0' son dos valores cualquiera, la ecuacion (14) tiene solución única tal que $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.*

Si $R(x) = 0$, la ecuación se llama homogenea. Esta es en realidad la más importante. Cuando $R(x) \neq 0$ se llama ecuación completa.

Teorema 30. *La solución general de la ecuación completa (14) es la suma de una solución particular y la solución general de la ecuación homogenea.*

Lema 31. *Dadas dos soluciones y_1 e y_1 de la ecuación homogenea, cualquier combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ también lo es.*

Podría ocurrir que una es multiplo de la otra. En cualqueir otro caso, dadas dos soluciones particulares de la homogenea, entonces $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general.

Teorema 32. *Dadas dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogenea, entonces $y_g = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general.*

Prueba.

Dada una solución y hay que encontrar dos constantes tal que $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Ahora bien, como la solución es única una vez ajustamos los valores iniciales, se tiene que es suficiente probar que

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \\ y'(x_0) &= c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) \end{aligned}$$

Sistema que tendrá solució si

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) \neq 0.$$

Lema 33. *El Wronskiano es o bien identicamente cero, o no se anula nunca.*

Prueba. Derivando se obtiene

$$W'(x) = y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x)$$

y sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$\frac{dW}{dx} + PW = 0,$$

con lo que $W = ce^{-\int P dx}$ que demuestra el resultado pues es una exponencial que solo se anulará si $c = 0$.

Lema 34. *Dos soluciones son linealmente independientes si y solo si $W \equiv 0$.*

Prueba. Si son linealmente dependientes el resultado es obvio. Supongamos que $W \equiv 0$. Entonces, dividiendo por y_1^2, que se puede pues es no cero en un intervalo $[c, d]$ por continuidad si no es la solución trivialemente nula, queda que

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0,$$

o bien

$$y_2 = ky_1,$$

en el intervalo $[c, d]$, pero entonces son iguales por el teorema de unicidad.

Ejemplo. Para probar que $y(x) = c_1 \mathrm{sen} x + c_2 \cos x$ es la solución general de $y'' + y = 0$, basta ver que son soluciones linealmente independientes. Que son soluciones se ve derivando, y para ver la independencia lineal observamos que

$$-(\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x) = -1 \neq 0,$$

en todo $x \in \mathbb{R}$.

2.8. **Método de variación de constantes.** Una vez que tenemos una solución de la ecuación homogénea, podemos calcular otra suponiendo que $y_2 = vy_1$, donde v es alguna función de x no constante. Entonces,

$$y_2' = v'y_1 + vy_1'$$
$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

con lo que, para que sea solución de la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + Py_2' + Qy_2 = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + P(v'y_1 + vy_1') + Qvy_1 \\ &= v(y_1'' + Py_1 + Qy_1) + v'(2y' + Py_1) + v''y_1 = v'(2y_1' + Py_1) + v''y_1, \end{aligned}$$

e integrando queda

$$\log(v') = -(2\log y_1 + \int P),$$

o bien

$$v' = \frac{e^{-\int P}}{y_1^2}$$

con lo que

$$v = \int \frac{e^{-\int P}}{y_1^2}.$$

Ejemplo. $x^2y'' + xy' - y = 0$ tiene la solución $y = x$, y aplicando la fórmula anterior con $P = 1/x$ obtenemos $v = -\frac{1}{2x^2}$, y por tanto $y = -\frac{1}{2x}$ es otra solución linealmente intedepdiente.

2.9. **Ecuación homogenea con coeficientes constantes.**

$$y'' + py' + qy = 0,$$

probamos la solución $y = e^{mx}$, y obtenemos

$$m^2 + pm + q = 0,$$

que tiene las soluciones $c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_1x}$ si m_1, m_2 son las dos raices reales y distintas, $c_1e^{ax}\mathrm{sen}(bx) + c_2e^{ax}\cos(bx)$ si las raices son complejas conjugadas $a \pm bi$, y $c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}$ si el polinomio tiene la raíz m doble. La segunda solución sale del método de variación de constantes.

Método de los coeficientes indeterminados. Se utiliza para resolver ecuaciones completas con coeficientes constantes y término independiente una combinación de funciones trigonométricas, exponenciales y polinomios.

Si el término independiente es una exponencial Ce^{ax} probamos la misma multiplicada por una constante, $y_p = Ae^{ax}$ con lo que queda

$$A(a^2 + pa + q) = C,$$

que será posible siempre que $a^2 + pa + q \neq 0$. En caso de que sea cero intentamos Axe^{ax}, y nos queda

$$A(a^2 + pa + q)xe^{ax} + A(2a + p)e^{ax} = Ce^{ax}$$

que será posible siempre que $2a + p \neq 0$. Si también es cero, intentamos Ax^2e^{ax}, y nos queda

$$A(a^2 + pa + q)x^2e^{ax} + A(2a + p)xe^{ax} + 2Ae^{ax} = Ce^{ax}$$

que nos da la solución con $A = C/2$.

En el caso en el que el término independiente es $\mathrm{sen}(ax)$, se tiene que intentar $A\mathrm{sen}(ax) + B\cos(ax)$, simplemente porque, en realidad, tenemos dos exponenciales $e^a ix$ y e^{-aix}, con lo que debemos probar una combinación lineal.

En general, si tenemos $Ce^{ax}\mathrm{sen}(bx) + De^{ax}\cos(bx)$, deberemos probar una combinación lineal del mismo estilo, es decir, $Ae^{ax}\mathrm{sen}(bx) + Be^{ax}\cos(bx)$.

Método de variacion de parámetros. Se sabe la solución general de la homogenea, y se utiliza una función del estilo $v_1y_1 + v_2y_2$ al derivar e imponer $v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0$.

2.10. **Ecuaciones de orden superior y Sistemas.** Sólo tratamos las ecuaciones lineales con coeficientes constantes. Los resultados son análogos a los que se han presentado para ecuaciones de orden 2. Cuando una raíz m se repite k veces, se debe probar

$$\left(\sum_{i=0^k} a_i x^i\right) e^{mx}.$$

En el caso que sean raices complejas repetidas, al sumar parte real e imaginaria de ambas exponenciales queda

$$e^{ax}\{(\sum_{i=0^k} a_i x^i)\cos bx + (\sum_{i=0^k} b_i x^i)\mathrm{sen}(bx)\}.$$

A veces para describir un fenómeno más que una función incógnita tenemos un conjunto de funciones. En ese caso las ecuaciones diferenciales que definen el fénomeno forman un sistema del estilo

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{array}\right\}$$

Un sistema que aparece particularmente interesante es al considerar una ecuación de orden n. En este caso el cambio $y_2 = y_1'$,$y_3 = y_2'$,..., $y_n = y_{n-1}'$, con lo que queda

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\}$$

Teorema 35. *Si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ y las parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ son contínuas en un recinto R y $a \in R$ es un punto interior, entones existe una única solución al sistema con condiciones iniciales dadas.*

Este teorema aplicado a las ecuaciones de orden n queda

Teorema 36. *Si la función y todas sus parciales hasta orden n son contínuas en una región R y a es un punto interior a R, el problema de valores iniciales tiene solución única.*

En el caso particular de sistemas lineales con dos ecuaciones tenemos el siguiente teorema referente al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & a_1(t)x + a_2(t)y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} & = & b_1(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{array}\right\}$$

Teorema 37. *Si las funciones $a_i(t), b_i(t), f_1(t), f_2(t)$ son funciones contínuas en $[a, b]$ y $t_0 \in [a, b]$ y x_0, y_0 son números reales cualquiera, entonces el problema de valores iniciales tiene solución única.*

Definición 38. *Cuando $f_1(t) = f_2(t) = 0$, entonces el sistema se llama homogeneo.*

Teorema 39. *Si $v_1 = (x_1(t), y_1(t))$ y $v_2 = (x_2(t), y_2(t))$ son soluciones de un sistema homogeneo, entonces cualquier combinación lineal $c_1v_1 + c_2v_2$. también lo es.*

Teorema 40. *Si el wronskiano $W(t) = |v_1, v_2|$ es diferente de cero entonces $v = c_1v_1 + c_2v_2$ es la solución general del sistema homogeneo.*

Teorema 41. *El wronskiano o no se anula o es identicamente cero.*

Prueba. Se basa en la identidad $W' = (a_1 + b_2)W$.

Igual que en el caso de ecuaciones de orden 2, teniendo la solución general del sistema homogéneo, y una solución particular del completo, tenemos la solución general del completo.

Para resolver el sistema homogeneo con funciones coeficientes constantes probamos la solucion $x = Ae^{mt}$, $y = Be^{mt}$. Si las raices son distintas, tenemos dos vectores exponenciales linealmente independientes. Si son iguales probaremos las soluciones $x = (a + bt)e^{mt}, y = (c + dt)e^{mt}$. Si estamos en el caso de raices complejas, las soluciones son del estilo

$$x_1 = e^{at}(A_1 \cos(bt) - A_2 \mathrm{sen}(bt)$$
$$y_1 = e^{at}(B_1 \cos(bt) - B_2 \mathrm{sen}(bt)$$
$$x_2 = e^{at}(A_1 \cos(bt) + A_2 \mathrm{sen}(bt)$$
$$y_2 = e^{at}(B_1 \cos(bt) + B_2 \mathrm{sen}(bt)$$

2.11. **Métodos numéricos.** Se aplican tanto para las ecuaciones que no sabemos resolver, como simplemente para tener una aproximación numérica del valor de la solución. Tratamos la ecuación

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Los métodos dan una aproximación del valor exacto de la solución en una lista de puntos $x_i = x_0 + ih$, para $i = 1, \ldots, n$. Ahora bien, integrando la ecuación nos queda por la regla de Barrow

$$y(x_1) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx.$$

reemplazando y por y_0 nos queda

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

y, en general

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Por Taylor, el error que se comete en cada paso es $\frac{1}{2}y''(\xi)h^2$. Teniendo en cuenta $y'' \leq M$, y acumulando los errores que se cometen en cada paso se tiene

$$E \leq \frac{n}{2}Mh^2 = \frac{(x_n - x_0)}{2}Mh.$$

Para mejorar el error se toma la aproximación de Euler $z_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1})$, y después

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, z_k)\right).$$

Se puede demostrar que en cada paso se comete un error del orden de $cy'''(\xi)h^3$, por lo que el error total es cuadrático.

Un método mucho mas potente es Runge-Kutta que se apoya en la regla de Simpson para aproximar integrales

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx = \frac{h}{6}(f(x_0, y_0) + 4f(x_{1/2}, y(x_{1/2}) + f(x_1, y(x_1)).$$

Como los valores $y(x_{1/2})$, y $y(x_1)$ son desconocidos, utilizamos aproximaciones por métodos anteriores. Sean

$$\begin{aligned} m_1 &= f(x_0, y_0) \\ m_2 &= f(x_0 + h/2, y_0 + \frac{h}{2} m_1) \\ m_3 &= f(x_0 + h/2, y_0 + \frac{h}{2} m_2) \\ m_4 &= f(x_0 + h, y_0 + h m_3) \end{aligned}$$

utilizaremos dicha aproximación para obtener

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

Ejemplo. Aproximar la solución de $y' = 1 - x + 4y$ con valor inicial $y(0) = 1$, en $x = 0.2$ por los tres métodos y comparar con la solución exacta.

Como la ecuación es lineal, resolvemos la homogénea que tiene por solución general $y = ce^{4x}$. Una solución particular de la completa es $-\frac{3}{16} + \frac{1}{4}t$, y utilizando la condición inicial vemos que $c = \frac{19}{16}$ con lo que la solución exacta queda

$$y = \frac{19}{16} e^{4t} - \frac{3}{16} + \frac{t}{4}.$$

El valor exacto es $y(0.2) = 2.505329852$.

Si aproximamos por Euler nos queda $y(0.2) = y(0) + 0.2 f(0, 1) = 1 + 0.2\dot{5} = 2$.

Euler en dos pasos sería $y(0.1) = y(0) + 0.1 f(0, 1) = 1 + 0.1\dot{5} = 3/2$, luego $y(0.2) = y(0.1) + 0.1 f(0, 1.5) = 1.5 + 0.1\dot{7} = 2.2$.

Utilizando Euler mejorado tenemos $y(0.2) = y(0) + 0.1(f(0, 1) + f(0.2, 2) = 1 + 1.38 = 2.38$.

Y si lo hacemos en dos pasos queda $y(0.1) = y(0) + 1/20(f(0, 1) + f(0.1, 1.6) = 1 + 0.61 = 1.61$, y por tanto $y(0.2) = y(0.1) + 1/20(f(0.1, 1.61) + f(0.2, 1.97) = 2.41$.

Por último con Runge Kutta en un sólo paso obtenemos $m_1 = 5, m_2 = f(1/10, 3/2) = 6.9, m_3 = f(1/10, 1, 69) = 7, 66, m_4 = f(1/5, 2.532) = 10.928$, con lo que en un sólo paso tenemos la mejor aproximación $y(0.2) = y(0) + \frac{0.2}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) = 2.5016$.

3. Series de Fourier.

Aparecen como una generalización de espacios vectoriales de dimensión infinita, con el objetivo de escribir cualquier función suficientemente buena como combinación lineal, infinita, de los elementos de una base de funciones. Así pues vamos a generalizar los conceptos que a conocemos de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$.

Definición 42. *Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, (que en nuestro caso será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), es un conjunto con las siguientes propiedades.*

(1) *V es un grupo abeliano respecto de la suma.*
(2) *$a \cdot v \in V$ para todo $a \in K$, $v \in V$ y $1 \cdot u = u$.*
(3) *Se cumplen la propiedades distributivas $(a+b)u = au + bu$, y $a(u+v) = au + av$. Además $(ab)u = a(bu)$ para cualesquiera $a, b \in K$, $u, v \in V$.*

A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores.

Ejemplos. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}_k[x]$, $C^n(\mathbb{R})$..

Definición 43. *Dado un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, una aplicación $<,>: V \times V \to K$ es un producto escalar, si*
(1) *Definida positiva $< v, v > \geq 0$ y $< v, v >= 0$ si y solo si $v = 0$.*
(2) *Hermítico $< u, v >= \overline{< v, u >}$*
(3) *Sesquilineal $< au + bv, w >= a < u, w > +b < v, w >$.*

Observación. Cuando el espacio vectorial es sobre $\mathbb{R}$, sesquilineal se convierte en lineal, y Hermítico en simétrico.

Ejemplo 44.

El espacio $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$. Sobre los reales tenemos $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar $< u, v >= \sum_{i=1}^n u_i v_i$.

Ejemplo 45.

En el espacio de las funciones contínuas sobre un intervalo $[a, b]$, $C[a, b]$, se puede definir el producto escalar

$$< f, g >= \int_a^b f\overline{g}dx.$$

Ejemplo 46.

Se define el espacio $L^2[a, b]$ como es espacio cociente de las funciones de cuadrado integrable, (se utiliza la integración Lebesgue),

$$< f, f >= \int_a^b |f|^2 dx < \infty,$$

cociente las funciones no nulas en un conjunto de medida nula.

Definición 47. *Una norma asociada a un espacio vectorial real o complejo es una aplicación $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}^+$ tal que*
(1) *$||v|| \geq 0$, y sólo es cero si $v = 0$.*
(2) *$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$,*
(3) *$||av|| = |a|||v||$.*

Dado un producto escalar, se tiene una norma asociada $||v|| = \sqrt{< v, v >}$.

Teorema 48. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Prueba. Por ser el producto escalar definido positivo, y sesquilineal, se tiene para cualquier $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq < u + tv, u + tv >= ||u||^2 + 2\,\mathrm{Re}(t < u, v >) + |t|^2||v||^2,$$

y escogiendo $t = -\frac{\overline{<u,v>}}{||v||^2}$, obtenemos

$$0 \leq ||u||^2 - \frac{|<u,v>|^2}{||v||^2},$$

que nos da el resultado.

Corolario 49. *(Desigualdad triangular) Sea* $||x|| = \sqrt{|<x,x>|}$. *Entonces*

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Prueba.

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= <u+v, u+v> = ||u||^2 + 2\mathrm{Re}(<u,v>) + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + 2|<u,v>| + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2. \end{aligned}$$

Definición 50. *Una distancia asociada a un espacio vectorial real o complejo es una aplicación* $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ *tal que*

(1) $d(u,v) \geq 0$, *y sólo es cero si* $v = u$.
(2) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$,
(3) $d(u,v) = d(v,u)$.

Dada una norma, se tiene la distancia asociada $d(u,v) = ||u-v||$.

Dado que estaremos estudiando espacios de dimensión infinita, la forma de escribir una función como combinación lineal de otras se podrá utilizando infinitos elementos y, por tanto, el concepto de límite. Nos interesa saber en que sentido la combinación lineal converge a la función dada.

Definición 51. *En un espacio normado* X, *una sucesión* $\{x_n\}$ *converge a* x *si*

$$||x_n - x|| \to 0 \quad \textit{cuando } n \to \infty.$$

En particular si $\{\phi_n\}_{n \geq 0} \subset X$ *una sucesión infinita. Entonces* $x = \sum_n a_n \phi_n$ *si*

$$\lim_{N \to \infty} ||x - \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n|| = 0.$$

Ejemplo.

Si tomamos en $C([0,1])$ las funciones $x_n(t) = t^n$, tenemos

$$\int_0^1 |t|^{2n} dt = \left. \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^1 = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

con lo que $x_n(t)$ converge a la función 0. Obsérvese que, si cojemos el valor de $x_n(t)$ para cualquier $t \in [0,1)$, el límite es 0, mientras que $x_n(1) \to 1$, con lo que el límite puntual de esta sucesión de funciones no es contínua. De ahí la necesidad de introducir el espacio $L^2[0,1]$. Este, sin embargo, es un espacio completo y el límite de funciones en L^2 es una función de L^2.

Al igual que en $\mathbb{C}^n$, necesitamos encontrar una base de L^2 y un método de escribir cualquier función como combinación lineal de los elementos de la base.

Definición 52.
(a) *Se dice que dos vectores x, y son ortogonales si $< x, y >= 0$. Se dice que son normales si $||x|| = 1$.*
(b) *Una sucesión $\{x_n\}$ es ortogonal si $< x_n, x_m >= 0$ si $n \neq m$. Se dice ortonormal si, ademas, $||x_n|| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplos. La sucesión $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{e^{int}\}$ es una sucesión ortonormal en $L^2[-\pi, \pi]$.
En efecto si $n \neq m$ se tiene

$$\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \left.\frac{e^{i(n-m)t}}{n-m}\right|_0^{2\pi} = 0,$$

mientras que si $n = m$

$$\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-int}dt = 2\pi.$$

La sucesión $\underline{x}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt)$, $y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{sen}(nt)$ es una sucesión ortonormal en $L^2[-\pi, \pi]$.

En efecto, teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}((n+m)t) = \mathrm{sen}(nt)\cos(mt) + \mathrm{sen}(mt)\cos(nt)$, y que $\cos((n+m)t) = \cos(mt)\cos(nt) - \mathrm{sen}(nt)\mathrm{sen}(mt)$, se tiene para $0 \leq n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(nt)\mathrm{sen}(mt)dt &= \int_0^{2\pi} (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t))dt = 0,\\
\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt &= \int_0^{2\pi} (\cos((n+m)t) + \cos((n+m)t))dt = 0,\\
\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(nt)\cos(mt)dt &= \int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}((n+m)t) - \mathrm{sen}((n+m)t))dt =\\
&= (\cos((n-m)t) - \cos((n+m)t))|_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(nt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nt)dt = \pi,\\
&\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2nt)dt = \pi,\\
&\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi,
\end{aligned}$$

Teorema 53. *(Ortonormalización de Gram-Schmidt) Sea $\{x_n\} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ una sucesión finita o infinita de vectores linealmente independientes de un espacio de Hilbert. Entonces existe otra $\{\phi_n\} = \{\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ ortonormal tal que $L(\{x_n\}) = L(\{\phi_n\})$.*

Prueba. Tomar $\phi_1 = x_1/||x_1||$, y $y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} < x_n, \phi_i > \phi_i$, $\phi_n = y_n/||y_n||$.

Ejemplo 54.

Tomar $x_n = t^n$ en $L^2[-1,1]$, y calcular hasta ϕ_5. Empezamos con $y_1 = 1$, que tiene norma

$$||y_1||^2 = \int_{-1}^{1} 1dt = 2,$$

con lo que $\phi_1 = 1/\sqrt{2}$. Ahora $y_2 = t - < t, 1 > 1/2$, y como

$$< t, 1 >= \int_{-1}^{1} tdt = 0,$$

nos queda $y_2 = t$, que tiene como norma

$$||y_2||^2 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3},$$

con lo que

$$\phi_2 = \sqrt{3/2}\, t.$$

$y_3 = t^2 - \frac{1}{2} < t^2, 1 > -\frac{3}{2} < t^2, t > t$, $< t^2, 1 >= \frac{2}{3}$, $< t^2, t >= 0$, con lo que $y_3 = t^2 - \frac{1}{3}$, y $||y_3||^2 = 8/45$.

$$\begin{aligned} y_4 &= t^3 - \frac{45}{8} < t^3, (t^2 - 1/3) > (t^2 - 1/3) - \frac{3}{2} < t^3, t > t - \frac{1}{2} < t^3, 1 > \\ &= t^3 - \frac{3}{5} t \end{aligned}$$

que tiene como norma $||y_4||^2 = 8/175.$, y de la misma forma se obtiene

$$y_5(t) = t^4 - \frac{6}{7} t^2 + \frac{3}{35}$$

que tiene como norma $||y_5||^2 = 128/11025$.

Definición 55. *Se dice que un espacio vectorial es separable si hay un sistema numerable denso.*

(a) *Todo sitema numerable denso se llama un sistema completo.*
(b) *Si $\{\phi_n\}$ es un sistema ortonormal completo, se dice que es una base ortonormal.*
(c) *Si $x = \sum_n a_n \phi_n$, entonces $\sum_n a_n \phi_n$ se llama serie de Fourier de x respecto a $\{\phi_n\}$, y a_n el coeficiente de Fourier n-ésimo.*

Teorema 56. *Sea X un espacio Euclideo sobre K, $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal y $x = \sum_n a_n \phi_n$. Entonces $a_n =< x, \phi_n >$.*

Prueba. Si multiplicamos por ϕ_m se tiene

$$< \sum_n a_n \phi_n, \phi_m >= \lim_{N \to \infty} \sum_{n \le N} a_n < \phi_n, \phi_m >= a_m.$$

Ejemplo 57.

$L^2[a,b]$ es un espacio separable, y $\left\{1, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right)\right\}$ es un sistema completo. Es decir, toda función $x(t) \in L^2[a,b]$ se puede expresar como $x(t) = \sum_{n \ge 0} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right) + \sum_{n \ge 1} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{b-a} nx\right)$

Si el sistema $\{\psi_n\}$ es ortogonal, pero no ortonormal, entonces $\{\psi_n\}/||\{\psi_n\}||$ es ortonormal y

$$x = \sum_n a_n \phi_n.$$

teniendo en cuenta que $a_n =< x, \phi_n >$, nos queda

$$x = \sum_n < x, \phi_n > \phi_n = \sum_n \frac{< x, \psi_n >}{||\psi_n||^2} \psi_n,$$

y $\frac{<x,\psi_n>}{||\psi_n||^2}$ son los coeficientes de Fourier respecto al sistema $\{\psi_n\}$.

Ejemplo. $\{e^{int}\}$ es un sistema ortogonal completo en $L^2[-\pi, \pi]$. Como $||e^{int}||^2 = 2\pi$, tenemos que para cualquier función de $L^2[-\pi, \pi]$

$$x(t) = \sum_{n \geq 0} a_k e^{ikt},$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-ikt} dt.$$

Esta se denomina la serie de Fourier compleja de $x(t)$. Por otro lado considerando el sistema ortogonal $\{1, \text{sen}(nt), \cos(nt))\}$ tenemos la serie de Fourier trigonométrica

$$x(t) = \sum_{n \geq 0} a_n \cos(nt) + \sum_{n \geq 1} b_n \text{sen}(nt),$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(nt) dt$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \text{sen}(nt) dt$$

Ejemplo 58.

Encontrar la serie de Fourier trigonométrica de la función $x(t) = t$ en $L^2[-\pi, \pi]$. En este caso

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0,$$

integrando por partes con $t = u$, $\cos(nt)dt = dv$ se tiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi n} t \,\text{sen}(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nt) dt = 0,$$

y por último, integrando de nuevo por partes con $t = u$, $\text{sen}(nt)dt = dv$, se tiene

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \text{sen}(nt) dt = -\frac{1}{\pi n} t \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt = (-1)^{n+1} \frac{2}{n},$$

Por tanto, la serie de Fourier pedida es

$$2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nt).$$

Teorema 59. *$\{\phi_n\}$ es un sistema completo si y solo si $x = 0$ es el único vector ortogonal a todo el sistema.*

Observación. Que esté completo quiere decir que no falta ningún elemento en el sistema. Si, por ejemplo, quitamos el 1 al sistema del ejemplo anterior, entonces 1 será ortogonal a todo el sistema y no es el vector cero.

Teorema 60. *(de Pitágoras)Si x e y son ortogonales, entonces*

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Prueba.

$$||x+y||^2 =< x+y, x+y >= ||x||^2 + 2\text{Re} < x, y > + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Como consecuencia se tiene el siguiente teorema

Teorema 61. *Un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ es completo si y solo si para todo $x \in X$*

$$||x||^2 = \sum_n | < x, \phi_n > |^2.$$

Prueba. Si es completo, entonces todo elemento de x se escribe como $x = \sum_n < x, \phi_n > \phi_n$. Ademas es inmediato ver que $x - s_N$ es perpendicular a ϕ_n para cualquier $n \leq N$, y por tanto al espacio generado por $< \phi_1, \dots, \phi_N >$ y en particular a s_N con lo que por el teorema anterior se tiene

$$||x||^2 = ||x - s_N||^2 + ||s_N||^2,$$

y tomando límite cuando $N \to \infty$ se obtiene el resultado ya que $||s_N||^2 = \sum_{n \leq N} | < x, \phi_n > |^2$. Por el contrario, si

$$||x||^2 = \sum_n | < x, \phi_n > |^2,$$

entonces

$$||x - s_N||^2 = ||x||^2 - ||s_N||^2$$

que tiende a cero por hipótesis, demostrando el resultado ya que el único vector de norma cero es el cero.

En general, si el sistema no es completo, se tiene una desigualdad

Teorema 62. *(Desigualdad de Bessel) Si $\{\phi_n\}$ es un sistema ortonormal entonces*

$$\sum_n | < x, \phi_n > |^2 \leq ||x||^2.$$

Prueba. Basta con aplicar de nuevo el teorema de pitagoras con $x - s_N$ y s_N y observar que

$$||x - s_N|| \geq 0.$$

Corolario 63. *Si a_n es el coeficiente de Fourier de $x \in X$, con respecto a un sistema ortonormal, entonces $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.*

Teniendo en cuenta que s_N es perpendicular a $< \phi_1, \dots, \phi_N >$, tenemos

Teorema 64. *Sea $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal. Entonces, para cualquier $\{d_n\} \subset K$, y cualquier $x \in X$ se tiene*

$$||x - s_N|| \leq ||x - \sum_{n \leq N} d_n \phi_n||.$$

Observación. El teorema anterior nos dice que la serie de Fourier es la mejor aproximación a x por elementos generados por $\{\phi_n\}$.

Prueba. Sea $D_N = \sum_{n \leq N} d_n \phi_n$. Como

$$x - D_N = x - s_N + s_N - D_N,$$

y $d_N - s_N \in <\phi_1, \ldots, \phi_N>$, entonces $x - s_N \perp D_N - s_N$ y

$$||x - D_N||^2 = ||x - s_N||^2 + ||s_N - D_N||^2 \geq ||x - s_N||^2.$$

Ejemplos. Encontrar la mejor aproximación de la función escalón $u(t)$ por un polinomio de grado 4 en $L^2[-1,1]$. En este caso tenemos el sistema ortonormal dado en el Ejemplo 54, y la mejor aproximación será

$$\sum_{i=1}^{5} < u(t), y_i > \frac{y_i}{||y_i||^2} = -175/160(t^3 - 3/5t) + 3/4t + 1/2 = -175/160t^3 + 45/32t + 1/2.$$

3.1. **Series de Fourier trigonométricas.** En el caso de la serie de Fourier trigonométrica, la convergencia se puede entender en sentidos más precisos

Teorema 65. *Sea $\tilde{x} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. y x su extensión periódica a $\mathbb{R}$. Si x es contínua a trozos y tiene derivadas laterales en t_0, entonces*

$$\frac{x(t_0)^+ + x(t_0)^-}{2} = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt_0) + \sum_{n \geq 1} b_n \mathrm{sen}(nt_0).$$

Ejemplo. Encontrar la serie de Fourier trigonométrica de la función 2π-periódica definida como $x(t) = e^t$ en el intervalo $-\pi < t < \pi$. Usarla para determinar el valor de la cosecante y la cotangente hiperbólicas en π.

Los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\pi}.$$

En general, teniendo en cuenta las fórmulas para el resto de coeficientes de Fourier, se tiene para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t+int} dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+in} e^{(1+in)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{2}{t} \pi \frac{(-1)^n \mathrm{senh}(\pi)}{1+in} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n \mathrm{senh}(\pi)}{1+n^2} (1 - in), \end{aligned}$$

con lo que

$$x(t) \sim \frac{\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\mathrm{senh}(\pi)}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos(nt) - n\mathrm{sen}(nt))$$

En principio el símbolo $\sim$ es una identidad como funciones en $L^2[-\pi, \pi]$. Sin embargo, la función $x(t)$ es contínua a trozos, con la única discontinuidad en los múltiplos enteros de π, con lo que, por el Teorema 65 la igualdad en punto a punto y, en el putno π, queda

$$\begin{aligned}\cosh(\pi) &= \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos(n\pi) - n\operatorname{sen}(n\pi)) = \\ &= \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\left(1+2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2}\right),\end{aligned}$$

con lo que

$$\operatorname{cotanh}(\pi) = \frac{1}{\pi}\left(1+2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2}\right).$$

Por otro lado, evaluando en $t=0$, la función es contínua en ese punto y queda

$$1 = \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi} + \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1+n^2},$$

con lo que

$$\operatorname{cosech}(\pi) = \frac{1}{\pi}\left(1+2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)$$

En el caso en el que el intervalo es distinto del $[-\pi,\pi]$, la base ortonormal es la descrita el Ejemplo 57 y todo se hace de forma análoga.

Ejemplo. Encontrar la serie de Fourier de la extensión periódica de $x(t) = |t|$ en $[-3,3]$. En este caso, los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}|t|dt = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}|t|\cos(nt)dt = \frac{2}{3}\int_{0}^{3}t\cos(nt)dt = \frac{6}{(n\pi)^2}((-1)^n-1),$$

mientras que $b_n = 0$ por ser una función impar. Por tanto, la serie de Fourier queda

$$x(t) \sim \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{3}\pi t\right),$$

en el intervalo $[-3,3]$.

Notese que la función anterior, por se una función par, esta definida por el intervalo $[0,3]$ y solo tiene coeficientes de Fourier cosenos. Este es un hecho común a todas las funciones pares, definidas en intervalos $[-a,a]$ simétricos respecto del origen. Por otro lado, si la función es impar tendrá solo coeficientes senos, que se pueden calcular como el doble de la integral en el intervalo $[0,a]$.

Ejemplo 66.

La función $x(t) = t^2$, definida en $[-\pi, \pi]$ es una función par, y por tanto solo tiene coeficientes cosenos, quedando

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

con lo que

$$x(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Ejemplo. Consideramos la extensión periódica de la función $x(t) = \operatorname{sen}(et)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. En este caso, por ser una función impar, basta calcular los coeficientes en senos, y queda

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(et)\operatorname{sen}(nt) dt = \frac{(-1)^n n}{e^2 - n^2}\operatorname{sen}(e\pi),$$

con lo que

$$x(t) \sim \operatorname{sen}(e\pi)\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{e^2 - n^2}\operatorname{sen}(nt).$$

Podemos utilizar las fórmulas anteriores para funciones definidas en intervalos que empiezan en el origen. Efectivamente, si $x(t)$ esta definida en el intervalo $[0, \pi]$, entonces coincide con la función par definida en $[-\pi, \pi]$ con serie de Fourier con coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cos(nt) dt,$$

y también con la función impar definida en $[-\pi, \pi]$ con serie de Fourier con coeficientes

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\operatorname{sen}(nt) dt,$$

Ejemplo. Si tomamos la función $x(t) = t^2 + t$, sumando los resultados en el Ejemplo 66 y en el Ejemplo 58 nos queda que tiene como serie de Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$

$$x(t) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt) + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nt).$$

sin embargo, como función definida en $[0, \pi]$ tendrá una serie de Fourier de senos dada por

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (t^2 + t)\operatorname{sen}(nt) dt = \frac{2}{\pi}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi^2 + \pi}{n} + \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right),$$

mientras que la serie de Fourier de cosenos queda

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (t^2 + t) dt = \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (t^2 + t)\cos(nt) dt = \frac{2}{\pi}\left((-1)^n\frac{2\pi + 1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Teorema 67. *Sea $x(t)$ contínua en $[-\pi,\pi]$, con derivada contínua a trozos y $x(\pi) = x(-\pi)$. Entonces la serie de Fourier converge uniformemente a la función.*

Ejemplo. $x(t) = |t|$ tiene serie de Fourier que converge uniformemente en cualquier intervalo $[-a,a]$.

Teorema 68. *Sea $x(t)$ contínua, $x(\pi) = x(-\pi)$ con derivada contínua a trozos. Entonces la serie de Fourier de $x'(t)$ se obtiene derivando término a término la de $x(t)$ y tiene convergencia puntual a la función en cada punto en que $x''(t)$ existe.*

Prueba. El resultado se deduce integrando por partes en la definición de la serie de Fourier de la función derivada . Efectivamente, sea

$$x'(t) \sim \alpha_0 + \sum_{n\geq 1} \alpha_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} \beta_n \mathrm{sen}(nt),$$

la serie de Fourier de la derivada, que existe por ser contínua a trozos. Entonces, por definición

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x'(t)dt = \frac{1}{2\pi}(x(\pi) - x(-\pi)) = 0,$$

e integrando por partes con $\cos(nt) = u$, $x'(t)dt = dv$, tenemos

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x'(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left(\cos(nt)x(t)|_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\mathrm{sen}(nt)dt\right) = na_n,$$

y de manera análoga

$$\beta_n = nb_n,$$

como queríamos probar. La convergencia puntual de la serie a la función se deduce del Teorema 65

Ejemplo. Encontrar la serie de Fourier de la función

$$y(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -3 \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq 3 \end{cases}$$

La función dada es la derivada de $x(t) = |t|$ en cualquier punto distinto del 0 con lo que, teniendo en cuenta que

$$x(t) \sim \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{2n+1}{3}\pi t\right),$$

y derivando término a término nos queda

$$y(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)}\mathrm{sen}\left(\frac{2n+1}{3}\pi t\right),$$

Al igual que la serie de Fourier de la derivada se obtiene derivando, integrando la serie de Fourier se obtiene también un resultado interesante.

Teorema 69. *Sea $x(t) \in L^2[-\pi,\pi]$ una función contínua a trozos, y sea $X(t)$ una primitiva suya $X(t) = \int_{-\pi}^{t} x(u)du$. Entonces*

$$X(t) = a_0(t+\pi) + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}\mathrm{sen}(nt) - \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n}(\cos(nt) - \cos(n\pi)),$$

converge uniformemente, donde $x(t)$ tiene como serie de Fourier

$$x(t) \sim a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} b_n \mathrm{sen}(nt).$$

Prueba. Como $x(t)$ es contínua a trozos, tiene serie de Fourier que converge puntualmente a la función, además, por el Teorema 67 la convergencia es uniforme. Consideramos ahora $Y(t) = X(t) - \frac{a}{2\pi}t$ donde

$$a = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt.$$

De esta forma $Y(-\pi) = Y(\pi)$, y se puede aplicar el Teorema 68 con lo que la serie de Fourier de la derivada se obtiene derivando cada término. Por tanto, como $Y'(t) = x(t) - a/2\pi$, si

$$Y(t) = \alpha_0 + \sum_{n\geq 1} \alpha_n \cos(nt) + \sum_{n\geq 1} \beta_n \mathrm{sen}(nt),$$

entonces

$$x(t) - \frac{a}{2\pi} \sim \sum_{n\geq 1} n\beta_n \cos(nt) - \sum_{n\geq 1} n\alpha_n \mathrm{sen}(nt),$$

con lo que $\alpha_n = -b_n/n$, $\beta_n = a_n/n$. Por último, por la definición se tiene

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{a}{2\pi},$$

y evaluando en $t = -\pi$, queda

$$\frac{a}{2} = \alpha_0 - \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n}\cos(n\pi),$$

de donde se deduce el resultado. Observar que, teniendo en cuenta ahora la serie de Fourier

$$t \sim 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{sen}(nt),$$

se obtiene la serie de Fourier para la integral

$$X(t) = a_0\pi + \sum_{n\geq 1} \frac{(2a_0(-1)^{n+1} + a_n)}{n}\mathrm{sen}(nt) - \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n}(\cos(nt) - \cos(n\pi)),$$

Ejemplo. Integrando la función $x(t) = t$, en el intervalo $[-\pi,\pi]$, se obtiene

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt).$$

Integrando de nuevo, queda

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\mathrm{sen}(nx).$$

3.2. **Ecuaciones en derivadas parciales.** Nos restringimos a ecuaciones en derivadas parciales en dos variables y de segunto orden. En ese caso se pueden reducir a tres tipos, parabólicas, hiperbólicas o elípticas, por analogía con las ecuaciones que describen las distintas cónicas. Concretamente cualquier ecuación de segundo orden se puede escribir como

$$a\phi_{xx} + 2b\phi_{xy} + c\phi_{yy} + d\phi_x + e\phi_y + f\phi = g.$$

El tipo de ecuación se determina por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

con determinante d.

si $d = 0$	parabólicas,
si $d < 0$	hiperbólicas,
si A es definida positiva	elípticas.

Cuando a la ecuación se le añaden suficientes condiciones iniciales como para que la ecuación tenga solución única se le llama un problema de valores iniciales, o BVP.

Ejemplo. El ejemplo típico de una ecuación hiperbólica es la ecuación de ondas. Puedo modelar tanto el movimiento de una cuerda, como las ondas que se generan al lanzar una piedra en un estanque. En una dimensión la ecuación de una cuerda en movimiento $u(x, t)$ que describe la posición en el punto x en el momento t tiene la forma

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Esta ecuación, en prinicipio tiene infinitas soluciones. Vamos a suponer que la cuerda esta sobre el intervalo $[0, \pi]$, esta fija por los extremos, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ y que en el momento inicial conocemos tanto su posición como su velocidad, es decir, $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, para $0 < x < \pi$. Si fijamos el instante t, la función $u(x, t)$ esta definida en el intervalo $[0, \pi]$ y vale cero en los extremos. Si ahora hacemos su extensión impar, da una función contínua con existencia de derivada, por lo que se puede escribir en serie de Fourier como

$$u(x, t) = \sum_{k\geq 1} b_k(t)\mathrm{sen}(kx),$$

y suponiendo que es solución de la ecuación (15), obtenemos

$$\sum_{k\geq 1}(b_k''(t) + (ck)^2 b_k(t))\mathrm{sen}(kx) = 0,$$

La solución debe tener coeficientes nulos, con lo que

$$b_k''(t) + (ck)^2 b_k(t) = 0,$$

que tiene como soluciones

$$b_k(t) = A_k \cos(ckt) + B_k\mathrm{sen}(ckt),$$

por lo que

$$u(x, t) = \sum_{k\geq 1}(A_k \cos(ckt) + B_k\mathrm{sen}(ckt)\mathrm{sen}(kx).$$

Si ahora le imponemos la condición $u(x,0) = f(x)$, queda

$$\sum_{k\geq 1} A_k \mathrm{sen}(kx) = f(x),$$

con lo que, desarrollando en serie de Fourier de senos $f(x)$, tenemos

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{sen}(kx)dx,$$

mientras que de $u_t(x,0) = g(x)$,

$$\sum_{k\geq 1} (ckB_k \mathrm{sen}(kx) = g(x),$$

y desarrollando en serie de Fourier de senos la función g obtenemos

$$B_k = \frac{2}{ck\pi}\int_0^\pi g(x)\mathrm{sen}(kx)dx,$$

Tomando $f(x) = 0$, $g(x) = \cos(x)$, $c = 1$, nos queda $A_k = 0$, mientras que

$$B_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos(x)\mathrm{sen}(kx)dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi g(x)\mathrm{sen}(kx)dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi(k^2-1)} & \text{si } k \text{ par,} \\ 0 & \text{si } k \text{ impar.} \end{cases}$$

con lo que

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(4k^2-1)}\mathrm{sen}(2kt)\mathrm{sen}(2kx).$$

3.3. **Variables separables.** La ecuación parabólica por excelencia es la ecuación del calor que, en su forma más simple unidimensional tiene la siguiente forma

$$\phi_t = \phi_{xx}.$$

Supongamos que es una barra de longitud π cuya temperatura a los extremos se mantiene constante igual a cero, $\phi(0,t) = \phi(0,\pi) = 0$, y que en el instante inicial es $f(x)$ en el punto x, es decir, $\phi(x,0) = f(x)$, con lo que tendremos un BVP con solución única. Para resolverla Supondremos que la variable en el espacio y en el tiempo se pueden separar de la siguiente forma

$$\phi(x,t) = T(t)X(x),$$

con lo que, metiéndolo en la ecuación tenemos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x),$$

o bien

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

y como son funciones de variables independientes, ambas han de ser constantes. Ademas, por las condiciones iniciales debe ocurrir que la temperatura decrece, con lo que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -k^2, \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2.$$

o bien

$$T(t) = Ce^{-k^2 t}, \qquad X(x) = A\cos(kx) + B\mathrm{sen}(kx).$$

Si imponemos la condición inicial, debería quedar

$$f(x) = A\cos(kx) + B\mathrm{sen}(kx),$$

lo cual en general es imposible. Sin embargo, podemos considerar la expansión de Fourier de f como función impar en el intervalo $[-\pi,\pi]$, con lo que tenemos

$$f(x)=\sum_{n\geq 1} b_n \mathrm{sen}(nx)$$

Así pues, tomando diferentes constantes $k\in\mathbb{N}$, tenemos que, por linealidad, la suma también será una solución, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales tenemos

$$\phi(x,t)=\sum_{k\geq 1} b_n e^{-n^2 t}\mathrm{sen}(nx)$$

donde

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx.$$

Por último mencionar que el ejemplo de ecuación elíptica, omnipresente en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, es la ecuación del potencial, o de Laplace

$$\phi_{xx}+\phi_{tt}=0,$$

cuyas soluciones se llaman funciones armónicas.

4. Transformada de Fourier

Se trata de generalizar la teoría de series de Fourier a funciones que no son periódicas. Sea $x(t)$ una función definida en $\mathbb{R}$, y sea $x_T(t)=x(t)$ en el intervalo $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$, y de período T. Si la función es contínua a trozos podemos calcular su serie de Fourier exponencial

$$x_T(t)=\sum_n\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(u)e^{\frac{-2\pi i}{T}nu}du\right)e^{\frac{2\pi i}{T}nt}.$$

Haciendo T tender a infinito, y utilizando la definición de integral de Riemann, obtenemos

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(u)e^{2\pi tu}du,$$

donde

$$\hat{x}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-2\pi tu}du,$$

Para hacer cómodo el desarrollo de la teoría vamos a suponer que $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ son funciones de $L=L^2(\mathbb{R})\cup L^1(\mathbb{R})$.

Definición 70. *Dada una función $x(t)\in L$, su transformada de Fourier se define como*

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-2\pi i\omega u}du,$$

la transformada inversa de una función $\hat{x}(t)\in L$ es

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{x}(\omega)\right\}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}(\omega)e^{2\pi it\omega}d\omega.$$

A la transformada de x se le denota por $\hat{x}$

Teorema 71. *Si $x(t)\in L$ es contínua a trozos y $tx(t)\in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{x}(\omega)$ es contínua.*

Prueba.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\hat{x}(\omega+h)-\hat{x}(\omega) &= \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(e^{-2\pi i(\omega+h)t}-e^{-2\pi i(\omega)t}\right)dt = \\ &= \lim_{h\to 0} -2\pi i h\int_{-\infty}^{\infty} t x(t) e^{-2\pi i\hat{\omega}t}dt = 0,\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado el teorema del valor medio en la segunda identidad.

Teorema 72. *Lema de Riemann-Lebesgue*

$$\lim_{\omega\to\pm\infty}\hat{x}(\omega)=0.$$

Prueba. Para facilitar la prueba supondremos que $x\in C^2(\mathbb{R})$ y que $x'\in L$. Si multiplicamos por $-e^{\pi i}$ y hacemos el cambio de variable $\omega t-1/2=\omega u$ queda

$$-e^{\pi i}\hat{x}(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-2\pi i(\omega t-1/2)}dt=-\int_{-\infty}^{\infty}x(u+1/2\omega)e^{-2\pi i\omega u}du$$

Con lo que

$$2|\hat{x}(\omega)|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|x(u)-x(u+1/2\omega)|du \ll \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{\infty}|x'(u)|du,$$

de donde se deduce el resultado haciendo $\omega\to\pm\infty$.

Teorema 73. *Si $x(t)\in L$ es una función $C^1(\mathbb{R})$, entonces para todo $t\in\mathbb{R}$ se tiene*

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{x}\right\}(t)=x(t).$$

Ejemplo 74. *Calcular la transformada de Fourier del pulso rectangular*

$$x(t)=\begin{cases}1 & \textit{si } t\in[-1/2,1/2]\\ 0 & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

En este caso nos queda

$$\hat{x}(\omega)=\int_{-1/2}^{1/2}e^{-2\pi i\omega t}dt=\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega},$$

y utilizando la transformada inversa obtenemos

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega}e^{2\pi i\omega t}d\omega.$$

Evaluando en $t=0$ y tras un cambio de variable encontramos la identidad

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

Ejemplo. Calcular la transformada de Fourier de $x(t)=e^{-|t|}$.

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t|}e^{-2\pi it\omega}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t}e^{-2\pi it\omega}dt+\int_0^{\infty}e^{-t}e^{-2\pi it\omega}dt= \\ &= \left(\mathcal{L}\left\{e^{(-1+2\pi i\omega)t}\right\}(s)+\mathcal{L}\left\{e^{-(1+2\pi i\omega)t}\right\}(s)\right)\Big|_{s=0}= \\ &= \frac{1}{1+2\pi i\omega}+\frac{1}{1-2\pi i\omega}=\frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}\end{aligned}$$

4.1. **Propiedades.** Sea $\hat{x}(t)$ la transformada de Fourier de $x(t)$.

(1) Simetría. Si $x(t)$ es real entonces $\hat{x}(-t) = \overline{\hat{x}(t)}$. Si, además $x(t)$ es par, entonces $\hat{x}(t)$ es real y par.

(2) Linealidad. $\mathcal{F}\{\alpha x + \beta y\}(\omega) = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y}$.

(3) Dualidad. $\hat{\hat{x}}(t) = x(-t)$.

(4) Cambio de escala. Para todo $a \neq 0$ se tiene $\mathcal{F}\{x(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{x}(\omega/a)$

(5) Traslación.

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\}(\omega) = e^{-2\pi i\omega t_0}\hat{x}(\omega)$$
$$\mathcal{F}\left\{e^{2\pi i\omega_0 t}x(t)\right\}(\omega) = \hat{x}(\omega-\omega_0)$$

(6) Modulación. $\mathcal{F}\{\cos(2\pi i\omega_0 t)x(t)\}(\omega) = \frac{1}{2}(\hat{x}(\omega-\omega_0) + \hat{x}(\omega+\omega_0))$

(7) Derivación. Si $x \in C^1(\mathbb{R})$ y tanto x como x' estan en L entonces

$$\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) = 2\pi i\omega\hat{x}(\omega).$$

Efectivamente, integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-2\pi i\omega t}dt = \\ &= e^{-2\pi i\omega t}x(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi i\omega\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi i\omega t}dt \\ &= 2\pi i\omega\hat{x}(\omega),\end{aligned}$$

ya que $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$.

(8) Derivación de la transformada.

$$\hat{x}'(\omega) = \mathcal{F}\{-2\pi itx(t)\}(\omega)$$

Ejemplo. Calcular la transformada de Fourier de la función $x(t) = e^{-\pi t^2}$.

Comenzamos notando que tanto x como x' son contínuas y estan en L por lo que se puede calcular su transformada de Fourier. Ademas, por la propiedad de derivación se tiene

$$\hat{x}'(\omega) = \mathcal{F}\{-2\pi itx(t)\}(\omega) = i\mathcal{F}\{x'(t)\}(\omega) = -2\pi\omega\hat{x}(\omega)$$

o bien

$$\frac{\hat{x}'(\omega)}{\hat{x}(\omega)} = -2\pi\omega,$$

y resolviendo la ecuación diferencial se tiene

$$\hat{x}(\omega) = Ke^{-\pi\omega^2}.$$

Por último evaluando en $\omega = 0$, se tiene $K = \hat{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}dt = 1$.

4.2. **Convolución.** Se define como

$$f \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

si f y g son integrables, $f \star g$ también lo es dado que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f \star g(t)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||g(t-\tau)|d\tau dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt\right) d\tau < \infty$$

Teorema 75. *Dadas x e y con transformadas $\hat{x}$, $\hat{y}$ se tiene*

$$\mathcal{F}\left\{x \star y\right\}(\omega) = \hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega).$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{x \star y\right\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau e^{-2\pi i\omega t}dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-2\pi i\omega t}dtd\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-2\pi i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-2\pi i\omega u}dud\tau = \\
&= \hat{x}(\omega)\hat{y}(\omega).
\end{aligned}$$

Ejemplo. Si $x(t)$ es la función pulso rectangular, entonces

$$H(t) = x \star x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

que tiene transformada de Fourier

$$\hat{H}(\omega) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega}\right)^2.$$

El espacio $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert, con el producto escalar

$$< x, y >= \int_{-\infty}^{\infty} x\bar{y}dt.$$

Podemos utilizarlo para probar el siguiente teorema

Teorema 76.

$$< x, y >=< \hat{x}, \hat{y} > .$$

Prueba. Considerar $z(t) = \bar{y}(-t)$. Entonces, por el teorema de inversión se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}\hat{z}e^{2\pi i\omega t}d\omega = x \star z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)z(t-u)du,$$

y evaluando en $t = 0$, se obtiene la identidad por la propiedad de simetría.

Corolario 77. *(Parseval) Si $x \in L$, entonces*

$$||x|| = ||\hat{x}||.$$

Ejemplo. Teniendo en cuenta que la transformada del pulso rectangular del Ejemplo 74 es

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega},$$

se tiene

$$1 = \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega)^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega} \right)^2 d\omega,$$

con lo que haciendo el cambio de variable $\pi\omega = u$, queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \right)^2 du = \pi$$

4.3. **Transformada de funciones generalizadas.**

Proposición 78.

(a)

$$\mathcal{F}\left\{\delta\right\}(\omega) = 1.$$

(b) *Sea sgn(t) la función signo, sgn(t) = 1 si t > 0, sgn(t) = −1 si t < 0. Entonces*

$$\mathcal{F}\left\{sgn\right\}(\omega) = \frac{1}{\pi i \omega}.$$

(c) *Sea u(t) la función escalón unitario. Entonces*

$$\mathcal{F}\left\{u\right\}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\delta(t) + \frac{1}{\pi i \omega}\right)$$

Prueba.

(a) Como vimos en el capítulo de las transformadas de Laplace, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2\pi i \omega t} dt = e^{2\pi i 0} = 1,$$

Podemos probar el resultado de otra forma. Sabemos que la transformada del pulso rectangular $x(t)$ en el Ejemplo 74

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega},$$

por tanto por la propiedad del cambio de escala, para cualquier $a > 0$, se tiene

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{a} x(t/a)\right\}(\omega) = \frac{\operatorname{sen}(\pi a \omega)}{\pi a \omega},$$

y haciendo a tender a cero se obtiene el resultado teniendo en cuenta que

$$\lim_{a\to 0} \frac{1}{a} x(t/a) = \delta(t).$$

(b) Se tiene $\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}(e_a(t) - e_a(-t))$, donde para cualquier $a > 0$,

$$e_a(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{F}\left\{e_a(t)\right\}(\omega) = \frac{1}{a+2\pi i\omega}, \qquad \mathcal{F}\left\{e_a(-t)\right\}(\omega) = \frac{1}{a-2\pi i\omega},$$

obtenemos el resultado haciendo a tender a cero.

(c) No hay mas que observar que $u(t) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{sgn}(t)$, y los dos apartados anteriores.

Aplicando la propiedad de dualidad al apartado (a) de la proposición anterior se tiene

Corolario 79.

$$\hat{1} = \delta(t).$$

Este corolario, también podemos probarlo de otra manera, entendiedo la función constantemente igual a 1 como límite de funciones en L. Efectivamente, consideremos $H(t)$ la función convolución del pulso rectangular consigo misma. Entonces para $a > 0$, se tiene

$$H(at) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1/a \\ at+1 & \text{si } -1/a < t < 0 \\ -at+1 & \text{si } 0 < t < 1/a \\ 0 & \text{si } t > 1/a. \end{cases}$$

Es claro que cuando $a \to 0$, la funcíon $H(at)$ tiende a la función constamentente igual a 1. Observese que el intervalo $(-1/a, 1/a) \to \mathbb{R}$, mientras que $\pm at + 1 \to 1$. Por otro lado, por la propiedad de escalabilidad

$$\mathcal{F}\left\{H(at)\right\}(\omega) = \frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{sen}(\pi\omega/a)}{\pi\omega/a}\right)^2 = a\left(\frac{\mathrm{sen}(\pi\omega/a)}{\pi\omega}\right)^2$$

para cualquier $\omega \neq 0$, mientras que $\mathcal{F}\left\{H(at)\right\}(\omega)(\omega) = \frac{1}{a}$. Con lo cual, cuando $a \to 0$,

$$\lim_{a\to 0} \mathcal{F}\left\{H(at)\right\}(\omega)(0) = +\infty,$$

mientras que $\lim_{a\to 0} \mathcal{F}\left\{H(at)\right\}(\omega)(\omega) = 0$ ya que es el producto de algo acotado, por algo que tiende a cero. Por otro lado, haciendo el cambio de variable $\omega/a = u$ queda

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\left(\frac{\mathrm{sen}(\pi\omega/a)}{\pi\omega/a}\right)^2 d\omega = \int_{\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}(\pi u)}{\pi u}\right)^2 du = 1.$$

Esta es exactamente la defición de la función delta.

Corolario 80.

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(u)du\right\}(\omega) = \frac{1}{2}\hat{x}(0)\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi i\omega}\hat{x}(\omega).$$

El resultado sale de la proposición anterior junto con la identidad

$$\int_{-\infty}^{t} x(u)du = x \star u(t).$$

Observar que si llamamos $h(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$, entonces $h'(t) = x(t)$, y la propiedad de derivación daría $\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}(\omega) = 2\pi i\omega\hat{h}(\omega) = 2\pi i\omega\left(\frac{1}{2}\hat{x}(0)\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi i\omega}\hat{x}(\omega)\right) = \hat{x}(\omega)$, ya que $\omega\delta(\omega) = 0$.

Proposición 81.

$$\mathcal{F}\left\{\sum_n \delta(t-nT)\right\}(\omega)=\frac{1}{T}\sum_n \delta(\omega-n/T)$$

Prueba. Tenemos que calcular el comportamiento asintótico, cuando $N\to\infty$ de

$$S_N(\omega)=\sum_{|n|\leq N} e^{-2\pi i\omega nT}=1+2\sum_{n\leq N}\cos(2\pi\omega nT)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}(2\pi\omega T(N+1/2))}{\operatorname{sen}(\pi\omega T)} & \omega\neq k/T\\ 2N+1 & \omega=k/T.\end{cases}$$

$S_N(\omega)$ es una función periódica de período $1/T$. El área es

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} S_N(\omega)d\omega=1/T,$$

con lo que en el límite se transforman en δ centradas en los múltiplos enteros de $1/T$.

4.4. **Funciones periódicas.** Sea $x(t)$ una función periódica de período T. Desarrollando en serie de Fourier de exponenciales complejas se tiene

$$x(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{2\pi i\frac{n}{T}t},$$

donde

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{2\pi i\frac{n}{T}t}dt$$

Teniendo en cuenta el Corolario 79, y la propiedad de traslación de la transformada se tiene

$$\mathcal{F}\left\{e^{2\pi i\frac{n}{T}t}\right\}(\omega)=\delta(t-\frac{n}{T}),$$

y por tanto

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}(\omega)=\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\delta(t-\frac{n}{T})$$

Considerando el caso particular de un tren de deltas, se puede obtener otra prueba de la Proposición 81. En efecto, la función tren de impulsos, en realidad, se puede ver como la extensión periódica, de periodo T de la función

$$f(t)=\begin{cases}\delta(t) & \text{si } |t|\leq T/2\\ 0 & \text{si } |t|>T/2\end{cases}.$$

Así pues, desarrollando la función $f(t)$ en serie de Fourier tenemos

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n e^{2\pi i\frac{n}{T}t},$$

donde, en este caso

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-2\pi i\frac{n}{T}t}dt=\frac{1}{T},$$

con lo que

$$\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{N}}\delta(\omega-\frac{n}{T}).$$

Si consideramos la función

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_T(t-nT) = x_T(t) \star \sum_n \delta(t-nT),$$

y tomando transformadas obtenemos

$$\hat{x}(\omega) = \hat{x}_T(t)\frac{1}{T}\sum_n \delta(\omega - n/T) = \sum_n c_n \delta(\omega - n/T),$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T}\hat{x}_T(n/T) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-2\pi i n/T}dt.$$

Aplicando la fórmula de inversión, y el Corolario 79 recuperamos la serie de Fourier de la función original.

5. Transformada Z

5.1. **Sistemas Discretos.** La importancia de las sucesiones y los sistemas discretos la podemos ver en el siguiente teorema de Shannon.

Teorema 82. *Supongamos que x es contínua a trozos y que $\hat{x}$ es de banda limitada, es decir, $\hat{x}(\omega) = 0$ si $|\omega| > L/2$. Entonces*

$$x(t) = \sum_n x(n/L)\frac{\operatorname{sen}(\pi(n-Lt))}{\pi(n-Lt)}$$

Prueba. Calculamos la serie de Fourier de $\hat{x}$ y obtenemos

$$\hat{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}e^{-2\pi i \frac{n}{L}t},$$

con

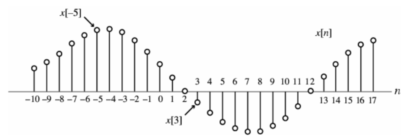
$$c_{-n} = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \hat{x}e^{2\pi i\frac{n}{L}t}dt = \frac{1}{L}x(n/L).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-L/2}^{L/2} \hat{x}(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}\int_{-L/2}^{L/2} e^{-2\pi i\frac{n}{L}\omega + 2\pi i\omega t}d\omega = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{-n}\frac{\left(e^{-\pi i(n-Lt)} - e^{\pi i(n-Lt)}\right)}{2\pi i(t-n/L)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n/L)\frac{\operatorname{sen}(\pi(n-Lt))}{\pi(n-Lt)}. \end{aligned}$$

El intercambio entre suma e integral sólo esta justificado si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n/L)$ es una serie absolutamente convergente, dando una identidad puntual.

Así pues con una sucesión de números podemos recuperar la señal, por lo que es importante operar con sucesiones, que después se pueden almacenar en un ordenador.



Definición 83. *Si $x[n] = x(nT)$, son los valores de una función $x(t)$ en los múltiplos de T, entonces T es el periodo, y su inversa $f = 1/T$ la frecuencia.*

Definición 84. *Sean $x[n]$ sucesiones reales o complejas*

- *$x[n]$ es finita si es cero para casi todos los índices.*
- *Es derecha si $x[n] = 0$ para todo $n < N$. Si $N \geq 0$ se dice causal.*
- *Es izquierda si $x[n] = 0$ para todo $n > N$. Si $N < 0$ se dice ainti-causal.*
- *Es periódica si $x[n + N] = x[n]$ para algún N, y para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
- *Es acotada si $|x[n]| < B$ para algún B y todo $n \in \mathbb{Z}$.*
- *Es sumable si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]| < \infty$, de cuadrado sumable si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]|^2 < \infty$. Las sucesiones de cuadrado sumable tienen energia finita $E = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n]|^2$, y potencia media es la media aritmética $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{|n|eN} |x[n]|^2$. Si la sucesión es periódica, la potencia media se define en el periodo. $P = \frac{1}{N} \sum_{0\leq n\leq N-1} |x[n]|^2$*

Definición 85. *Un sistema discreto realiza operaciones sobre las sucesiones, $x[n], x_1[n], x_2[n]$. La salida del sistema la denotamos por $y[n]$*

- *Suma, $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$*
- *Multiplicación, $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$*
- *Producto por un escalar, $y[n] = Ax[n]$*
- *Desplazamiento temporal (Retardo o Adelanto) $y[n] = x[n - N]$*
- *Inversión $y[n] = x[-n]$*
- *Convolución $x_1 \star x_2[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_1[k]x_2[n - k] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_1[k]x_2[n - k]$. Es asociativa, conmutativa, y distributiva.*
- *Interpolación $y[n] = \begin{cases} x[n/L] & si\ L|n \\ 0 & si\ L \nmid n \end{cases}$*
- *Diezmado $y[n] = x[nL]$*
- *Cualquier combinación de las anteriores.*

Ejemplos. Los siguientes son ejemplos de sistemas

- Toda sucesión se puede expresar como convolución con el impulso unitario
$$x[n] = x \star \delta[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\delta(n - k).$$
- El sistema acumulador
$$y[k] = \sum_{n\leq k} x[n] = y[k - 1] + x[k] = y[-1] + \sum_{0\leq n\leq k} x[n].$$
A $y[-1]$ se le llama condición inicial, siendo la segunda parte un acumulador causal.

- El sistema promedio $y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$

Definición 86. *Un sistema es lineal si* $y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$*, donde* $y[n]$ *es la respuesta a* $x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$*, y* α, β *son escalares.*

Ejemplo.
El promedio y el acumulador son lineales. El acumulador causal solo si las condiciones iniciales son nulas.
Determinar si $y[n] = x^2[n] - x[n+1]x[n-1]$ es lineal.

Definición 87. *Se dice que un sistema es invariante temporal si* $y[n] = y_1[n - n_0]$ *cuando* $x[n] = x_1[n - n_0]$

Ejemplo. El sistema interpolador varia con el tiempo, mientras que el acumulador es invariante temporal.

Definición 88. *Un sistema es LIT si es lineal e invariante temporal. Es causal si* $y[n_0]$ *no depende de entradas posteriores* $x[n]$ *con* $n > n_0$*.*

Ejemplo. El acumulador es LIT, y causal. ¿es $y[n] = x[-n]$ causal? ¿Es invariante temporal?

Definición 89. *La respuesta al impulso* $\delta[n]$ *se llama respuesta impulsional, y se denota por* $h[n]$*. La respuesta al escalon se llama respuesta escalon y se denota por* $s[n]$*.*

Ejemplo. La respuesta impulsional del acumulador es $y[n] = \sum_{k\leq n} \delta[k] = u[n]$. Otros ejemplos.

Teorema 90. *Sea* S *un LTI con respuesta a* $x[n]$*,* $y[n]$*. Entonces*

$$y[n] = x \star h[n].$$

Prueba. La sucesión la caracterizamos como $x[n] = x \star \delta[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\delta[n-k]$. Y teniendo en cuenta que el sistema es lineal y que la respuesta a $x[k]\delta[n-k]$ es $x[k]h[n-k]$, se obtiene el resultado.

Ejemplo. Calcula la respuesta de un LTI al escalon unidad si tiene respuesta impulsional $h[n] = a^n u(n)$.

Teorema 91. *Un sistema es BIBO si y solo si su respuesta impulsional es sumable. Es causal si y solo si la respuesta impulsional es causal.*

Ejemplos.

5.2. **Ecuaciones en diferencias.**

Definición 92. *Los sistemas LIT relacionados por una ecuacion en diferencias con coeficientes constantes son los de la forma*

$$\sum_{k=1}^{M} a_k x[n-k] = \sum_{k=1}^{N} b_k y[n-k].$$

El máximo entre M *y* N *es el orden del sistema, y* N *primeros valores de* y *se llaman condiciones iniciales. Si estas son cero, se dice que el sistema esta en reposo.*

La solución a $x[n] = 0$ se llama solución homogénea o del sistema homogéneo.

Lema 93. *La solución de un sistema en diferencias con coeficientes constantes es la suma de la solución homogénea mas una solución particular del completo. Es tambien la suma de la respuesta natural, a ante la entrada nula, y la de estado nulo, o de condiciones iniciales nulas.*

5.3. **La transformada Z.** La transformada Z es el análogo discreto de la transformada de Laplace en el caso continuo.

Definición 94. *Dada una sucesión $x[n]$, se define su transformada Z, $Z\{x[n]\}$ como la función de variable compleja*

$$G(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x[n]z^{-n}.$$

Ejemplos. Si $x[n] = \{1, 2, 3, 7\}$, entonces $Z\{x[n]\} = 1 + 2/z + 3/z^2 + 7/z^3$, que converge para cualquier $z \neq 0$.

Es posible que dos sucesiones tengan la misma transformada Z. Si tomamos $x[n] = \{u[n]\}$, entonces sumando la serie geométrica se tiene

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n\geq 0} (z)^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

mientras que si tomamos $x[n] = u[-n-1]$, entonces

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n\geq 1} z^n = \frac{z}{1-z}.$$

Este es un inconveniente que, en principio diferncia la teoría de la transformada Z con la de Laplace, u otras transformadas que hemos visto hasta ahora, ya que aquellas se pueden invertir. Sin embargo, la transformada de las dos sucesiones anteriores en realidad es muy diferente ya que, en el primer caso, la serie geométrica sólo se puede sumar si $|z| > 1$, mientras que la segunda solo si $|z| < 1$. Esto hace que la definición de la transformada Z no se restringa a la función, sino también a su región de convergencia, a veces denominada ROC.

Definición 95. *La región de convergencia de la transformada Z de una sucesión es el subconjunto $ROC \in \mathbb{C}$ para el que la suma es finita.*

Ejemplo. Si $x[n] = \delta(n)$, entonces $Z\{x[n]\} = 1$, con ROC$= \mathbb{C}$. Por otro lado, la sucesión $\delta(n-1)$ tiene ROC$= \mathbb{C} - \{0\}$, ya que su transformada Z es $\frac{1}{z}$.

Si $x[n] = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$, entonces

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n\geq 0} a^n z^{-n} + \sum_{n\leq -1} b^n z^{-n} = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b} = \frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}.$$

Para que la serie converja deben hacerlo las dos sumas, con lo que $|a/z| < 1$, y $|z/b| < 1$, o bien ROC$=\{z : |a| < |z| < |b|\}$.

La transformada Z tiene las siguientes propiedades.

(a) Linealidad. $Z\{(ax+by)[n]\} = aZ\{x[n]\} + bZ\{y[n]\}$. Además se tiene $\mathrm{ROC}(x[n]) \cap \mathrm{ROC}(y[n]) \subset \mathrm{ROC}((ax+by)[n])$.

(b) Desplazamiento temporal. $Z\{x[n-k]\} = z^{-k}Z\{x[n]\}$. La ROC queda invariante.

(c) Cambio de escala. $Z\{a^n x[n]\} = Z\{x[n]\}(z/a)$. Además si la región $\mathrm{ROC}(x) = \{r_1 < |z| < r_2\}$, entonces $\mathrm{ROC}(a^n x) = \{|a|r_1 < |z| < |a|r_2\}$

(d) Inversión. $Z\{x[-n]\} = Z\{x[n]\}(1/z)$, y si $\mathrm{ROC}(x) = \{r_1 < |z| < r_2\}$, entonce $\mathrm{ROC}(x[-n]) = \{1/r_1 < |z| < 1/r_2\}$

(e) Diferenciación. $Z\{nx[n]\} = -z(Z\{x[n]\})'$. La ROC no varía.

(f) Convolución. $Z\{x_1 \star x_2[n]\} = Z\{x_1[n]\} \cdot Z\{x_2[n]\}$. Además se tiene $\mathrm{ROC}(x_1) \cap \mathrm{ROC}(x_2) \subset \mathrm{ROC}(x_1 \star x_2)$

(g) Para toda sucesión causal, $x[0] = \lim_{z\to\infty} Z\{x[n]\}$.

Ejemplos

- Si $x[n] = (3(2^n) - 4(3^n))u(n)$, entonces $Z\{x[n]\} = -\frac{z^2+z}{(z-2)(z-3)}$, con $\mathrm{ROC} = \{|z| > 3\}$.

- Si $x[n] = \cos(\omega n)u(n)$, entonces $x[n] = \frac{1}{2}(e^{i\omega n} + e^{-i\omega n})u(n)$, y
$$Z\{x[n]\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{i\omega}} + \frac{z}{z-e^{-i\omega}}\right) = \frac{z^2 - \cos(\omega)z}{z^2 - 2\cos(\omega)z + 1}$$
Por último $\mathrm{ROC}(x[n]) = \{|z| > 1\}$.

- Si tomamos las sucesiones $x[0] = 1$, $x[1] = 2$, $x[2] = 5$, $x_1[-1] = 1$, $x_1[0] = 2$, $x_1[1] = 5$, $x_2[0] = 0$, $x_2[1] = 1$, $x_[2] = 2$, $x_2[3] = 5$, entonces $x_1[n] = x[n+1]$, mientras que $x_2[n] = x[n-1]$, con lo que
$$\begin{aligned} Z\{(x_1+x_2)[n]\} &= zZ\{x[n]\} + \frac{1}{z}Z\{x[n]\} = \left(z+2+\frac{5}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{5}{z^3}\right) \\ &= z + 2 + \frac{6}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{5}{z^3}. \end{aligned}$$
En este caso la ROC es todo el plano complejo salvo $z = 0$.

- Si $x[n] = a^n \cos(\omega n)u(n)$, entonces
$$Z\{x[n]\} = \frac{z^2 - a\cos(\omega)z}{z^2 - 2a\cos(\omega)z + a^2}, \qquad \mathrm{ROC} = \{|z| > |a|\}.$$

- Si $x[n] = u(-n)$, entonces $Z\{x[n]\} = \frac{1}{1-z}$, válida en $|z| < 1$.

- Si queremos determinar la señal discreta x que tiene por transformada Z $Z\{x[n]\} = \log(1 + a/z)$, con $|z| > |a|$, entonces derivando se obtiene
$$-zZ\{x[n]\})' = \frac{a}{z+a},$$
que es la transformada de la sucesión $a(-a)^{n-1}u(n-1)$. Por tanto, por la propiedad de diferenciación $x[n] = (-1)^{n-1}\frac{a^n}{n}u(n-1)$

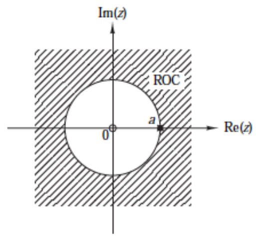
- Tomamos $x_1[0] = 1$, $x_1[1] = -2$, $x_1[2] = 1$, y $x_2[n] = 1$ para $0 \leq n \leq 5$ y cero en otro caso. Entonces
$$Z\{x_1[n]\} = 1 - 2/z + 1/z^2 \qquad Z\{x_2[n]\} = \frac{1 - z^6}{z^5 - z^6},$$
y multiplicando, obtenemos
$$Z\{x_1 \star x_2[n]\} = z^{-7} - z^{-6} - z^{-1} + 1.$$

5.4. **Transformadas racionales.** Sabemos que la solución a un sistema LIT se puede expresar como convolución de la entrada con la respuesta impulsional.
$$y[n] = x \star h[n].$$
Tomando la transformada Z queda
$$Y(z) = X(z)H(z),$$
donde $H(z)$ es la transformada Z de la respuesta impulsional. Se tiene por tanto
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$
En el caso se sistemas LIT dados por ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes
$$\sum_{k=0}^{M} a_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k y[n-k],$$
y usando las propiedades de la transformada, vemos que
$$X(z)\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k} = Y(z)\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k},$$
o bien
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}$$

Ejemplo. Calcula la función de transferencia del sistema
$$y(n) = 0.5y(n-1) - 0.3y(n-2) + 2x(n-1) + x(n-3).$$
Toda función racional se puede escribir como
$$X(z) = cz^k \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=j}^{N}(z - p_j)}.$$
Escrita de esta forma, la función tiene ceros en z_i, polos en p_j y si $k \geq 0$ un cero de orden k en el cero o polo de orden k en ∞ y si si $k \leq 0$, un polo de orden k en el cero o cero de orden k en ∞.

Observación. Una función racional tiene la misma cantidad de ceros que de polos contado multiplicidades, y el orden del punto del infinito.

Definición 96. *El diagrama de ceros y polos de una función racional es un diagrama en el plano complejo con círculos en los ceros y cruces en los polos, y un número al lado contando la multiplicidad.*



Ejemplo. Determinar el diagrama de ceros y polos de la sucesión $x[n] = a^n$ si $0 \leq n \leq M-1$.

Determinar la sucesión cuya transformada Z tiene ceros en $z_1 = 0$ y $z_2 = r\cos(\omega_0)$ y polos en $p_1 = re^{i\omega_0}$ y $p_2 = re^{-i\omega_0}$.

Para determinar la función de transferencia y la respuesta al impulso de la ecuación $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + 2x[n]$, tomamos la transformada Z obteniendo

$$Y(z) = z^{-1}\frac{1}{2}Y(z]) + 2X(z),$$

con lo que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2\frac{z}{z-1/2},$$

con lo que $h[n] = 2(1/2)^n u(n)$.

5.5. **Transformada Inversa.** En esta sección veremos dos métodos particulares para invertir la transformada Z. Para ello, nos sera útil tener una tabla de transformadas a mano.

	Señal, $x(n)$	Transformada z, $X(z)$	ROC
1	$\delta(n)$	1	Todo z
2	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
6	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$(\cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8	$(\operatorname{sen}\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
9	$(a^n\cos\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
10	$(a^n\operatorname{sen}\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\operatorname{sen}\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$

Desarrollo en serie. Sabemos que la transformada Z se puede desarrollar en serie, y que justamente sus coeficientes son los términos de la sucesión que buscamos.

Como hemos visto, la inversión depende de la ROC de la transformada Z. Conviene recordar que sucesiones causales o derechas tienen ROC que es el exterior de un disco, mientras que las anticausales será el interior de un disco.

Ejemplo. Invertir la transformada Z, $X(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$, en los dos casos siguientes

(a) ROC$= \{|z| > 1\}$,

(b) ROC$= \{|z| < \frac{1}{2}\}$.

Caso (a). En este caso, por ser la ROC el exterior de un círculo, la sucesión será causal, y por tanto expandimos en serie de potencias negativas de z, $X(z) = \sum_{n\geq 0} x[n]z^{-n}$. Ahora bien, multiplicando por el denominador, se tiene

$$
\begin{aligned}
1 &= \left(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)\sum_{n\geq 0} x[n]z^{-n} = \\
&= x[0] + (x[1]-3x[0]/2)z^{-1} + \sum_{n\geq 2}(x[n]-3x[n-1]/2+x[n-2]/2)z^{-n}
\end{aligned}
$$

Como dos series son iguales si lo son sus coeficientes, tenemos $x[0] = 1$, $x[1] = 3/2$, y para $n \geq 2$

$$x[n] - 3x[n-1]/2 + x[n-2]/2 = 0,$$

que es una ecuación en diferencias homogénea, con lo que probamos $x[n] = \lambda^n$, y obtenemos las dos soluciones $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$, y por tanto,

$$x[n] = c_1 + c_2(1/2)^n.$$

Ajustamos las dos constantes para que incluyan los valores de $x[0]$ y $x[1]$ obteniendo $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, con lo que

$$x[n] = (2 - (1/2)^n)u(n).$$

Caso (b). En este caso la ROC es el interior de un disco, por lo que la sucesión es anticausal, $X(z) = \sum_{n\geq 0} y[n]z^n$, donde $y[n] = x[-n]$. Procediendo de la misma forma que antes obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)\sum_{n\geq 0} y[n]z^n = \\ &= y[0]z^{-2} + (y[1]/2 - 3y[0]/2)z^{-1} + \sum_{n\geq 0}(y[n] - 3y[n+1]/2 + y[n+2]/2)z^n \end{aligned}$$

De donde se tiene $y[0] = y[1] = 0$, $y[2] = 2$ mientras que para $n \geq 3$, se tiene

$$y[n] - 3y[n-1]/2 + y[n-2]/2 = 0,$$

de donde $y[n] = c_1 + c_2 2^n$, y ajustando para obtener $y[2] = 2$, $y[3] = 6$ queda $y[0] = y[1] = 0$ y para $n \geq 2$

$$x[-n] = y[n] = 2^n - 2.$$

Para determinar la transformada inversa de $X(z) = \log(1 + a/z)$ para $|z| > |a|$, desarrollamos en serie de potencias el logaritmo, con lo que

$$\log(1 + a/z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}z^{-n},$$

por lo que

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Descomposición en fracciones simples.

La transformada Z racional general es del estilo $R(z^{-1}) + X(z)$, con

$$X(z) = \frac{P(z^{-1}}{Q(z^{-1})}$$

con el grado del polinomio P menor que el de Q. Así pues multiplicando por la potencia de z^{-1} correspondiente, se puede escribir

$$\frac{X(z)}{z} = z^r\frac{p(z)}{q(z)}$$

Podemos ahora descomponerla en fracciones simples del estilo

$$S(z) = \frac{Az}{(z-p)^r}.$$

para $A, p \in \mathbb{C}$, y $r \in \mathbb{N}$. Nos vamos a restringir al caso en el que todas las raices son distintas, con lo que $r = 1$. La transformada inversa para $r \geq 2$ se obtiene por la propiedad de diferenciación, ya que

$$\left(\frac{1}{(z-a)^r}\right)' = -r\frac{1}{(z-a)^{r+1}}.$$

Cuando las raices son complejas, obtenemos

$$\frac{A}{1-pz^{-1}} + \frac{\bar{A}}{1-\bar{p}z^{-1}}$$

que tiene como transformada inversa

$$2|A|r^n \cos(\beta n + \alpha)u(n),$$

donde $A = |A|e^{i\alpha}$, y $p = re^{i\beta}$. En el caso de una raíz doble se tiene que

$$\frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}$$

tiene como transformada inversa

$$np^n u(n).$$

Ejemplo.

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}/2}.$$

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

Departamento de Matemáticas, Universitat Politécnica Catalunya, Barcelona, Spain
Email address: jorge.urroz@upc.edu