

## Título: ¿SE PUEDE OÍR LA FORMA DE UN TAMBOR?

Profesor: Fabricio Macia Lang (Fabricio\_Macia@mat.ucm.es)

Descripción: En 1966, Mark Kac planteó la siguiente pregunta: ¿Es posible oír la forma de un tambor? o dicho de otro modo: si se conocen las frecuencias fundamentales de vibración de una membrana (sus armónicos fundamentales, en lenguaje musical), ¿se puede determinar su forma? Esta cuestión se enmarca en una disciplina matemática conocida como *Problemas Inversos*. A grandes rasgos, consiste en averiguar las *causas* de un fenómeno a partir de la observación de sus *efectos* (en oposición al estudio del problema directo, cuya resolución involucra obtener efectos a partir del conocimiento a priori de las causas). Dichos problemas aparecen de forma natural en numerosas cuestiones tecnológicas (prospección sísmica, exploración médica, radares, acústica, etc.).

Matemáticamente, el problema de Kac se formula como sigue: un número real  $\lambda$  es una frecuencia fundamental de vibración de una membrana  $D$  (representada por un dominio acotado del plano o una superficie compacta) si existe un desplazamiento  $\varphi(x, y)$  de la membrana en que el borde quede fijo que satisfaga:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \lambda \varphi, \quad \text{sobre } D.$$

El conjunto de dichas frecuencias se denomina *espectro de  $D$* . La pregunta original de Kac se formula entonces como: Si dos membranas  $D_1$  y  $D_2$  tienen el mismo espectro, ¿es entonces cierto que  $D_1 = D_2$  (módulo una isometría)?

Se puede comprobar que el área, el número de componentes conexas, el perímetro... vienen determinadas por el espectro. No obstante, la respuesta a la pregunta es NO: hubo que esperar a 1992 para que C. Gordon, D. Webb y S. Wolpert construyeran dos membranas no isométricas; pero que poseen el mismo espectro. Dicha construcción es una bonita e ingeniosa combinación de geometría y análisis.

El estudiante deberá realizar un pequeño trabajo que aborde uno de los dos enfoques siguientes (o una combinación de ambos):

1. Un estudio teórico, que podría consistir en analizar el ejemplo antes mencionado, o exponer algunos de los resultados positivos que se conocen.

2. **Un estudio numérico que, para una clase de ejemplos sencillos, ilustre la dependencia del espectro y otras cantidades geométricas de la forma de membrana.**

Dependiendo de los antecedentes e intereses del alumno, se podrán contemplar otros posibles enfoques al problema o analizar otros problemas inversos sencillos, de índole similar.

Con dicho trabajo se pretende complementar la formación del estudiante introduciéndolo en un campo interdisciplinar (involucra geometría, ecuaciones diferenciales, análisis numérico) cuyas técnicas son de gran aplicabilidad en el mundo industrial.

Periodo de realización: **Primer o segundo cuatrimestre.**

Prerrequisitos: **Tener superado el primer ciclo de la licenciatura en Matemáticas.**

Número de estudiantes: **1 ó 2 estudiantes.**

Presentación oral: **Optativa.**