

Capítulo 1

Las ecuaciones de movimiento

Ecuación de conservación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

Ecuación de Euler (segunda ley de Newton):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

1.1. Fluidos incompresibles

Si la densidad ρ es constante, la ecuación de conservación implica que el campo de velocidades no tiene ni fuentes ni sumideros:

$$\nabla \mathbf{v} = 0. \quad (1.3)$$

En mecánica de fluidos, a diferencia de en electromagnetismo, “fuente” significa justamente eso, una fuente, y lo mismo con “sumidero”. Como veremos en la sección 3.2.2, esta suposición está relacionada con que las velocidades típicas del problema en relación con la velocidad del fluido. Así, fluidos intuitivamente compresibles como el aire puede aproximarse como incompresibles para ciertos problemas (p.e. de ingeniería civil), pero no en otros (p.e. de aeronáutica).

Capítulo 2

Fluidos ideales

2.1. Flujo alrededor de cilindros

Consideremos un fluido irrotacional. En este caso, como se ha comentado en la sección ?? el flujo será potencial: puede definirse un campo escalar llamado *potencial* $\phi(\mathbf{r})$ del cual el campo de velocidades es el gradiente: $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Si el fluido es además incompresible, $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$, lo cual se traduce en

$$\nabla^2\phi = 0,$$

es decir: el potencial cumple la ecuación de Laplace, tan conocida en electromagnetismo y gravitación.

Como ejemplo paradigmático, resolvamos el problema del flujo alrededor de un cilindro infinito. Lejos del cilindro el fluido tiene una velocidad constante, que tomamos a lo largo del eje x . Matemáticamente, el campo de velocidades debe tender al valor constante $v_0\hat{x}$. Es fácil ver que el valor asintótico del potencial correspondiente es $\phi \rightarrow v_0x$. La otra condición en la frontera que se requiere es la referente a la superficie del cilindro. Claramente, \mathbf{v} no debe tener componente **radial** en la superficie del cilindro: si la tuviera, el fluido entraría dentro de él. Veremos que estas condiciones de contorno son suficiente para resolver el problema (aunque, como se discutirá en la siguiente sección, no de manera única).

Tomemos coordenadas cilíndricas, con el eje z a lo largo del eje del cilindro y el origen en su centro. La superficie del cilindro viene dada en estas coordenadas simplemente por $r = a$, donde a es el radio del cilindro, que es $v_0r \cos\theta$ en cilíndricas.

Como la ecuación de Laplace es lineal, podemos intentar añadir un nuevo término a ϕ que cumpla con las condiciones en la superficie del cilindro

$$\phi = \phi_0 + \phi_1,$$

con $\phi_0 = v_0r \cos\theta$. La componente radial de \mathbf{v} viene dada por $v_r = \partial\phi/\partial r$, así que queremos

$$\frac{\partial\phi(a, \theta)}{\partial r} = v_0 \cos\theta + \frac{\partial\phi_1(a, \theta)}{\partial r} = 0$$

Como esto tiene que valer para cualquier valor de θ , ϕ_2 debe ser necesariamente de la forma $f(r) \cos \theta$, de tal manera que podamos factorizar e ignorar un múltiplo común $\cos \theta$. En este punto, podemos recurrir a los libros de tablas y ver que la única otra solución de la ecuación de Laplace es $\cos \theta/r$. Es instructivo tratar de demostrar este hecho solucionando la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Tenemos por tanto

$$\phi = \left(v_0 r + \frac{d}{r} \right) \cos \theta,$$

donde la incógnita d se determina de imponer $v_r = \partial \phi / \partial r = 0$ en $r = a$:

$$\left(v_0 r - \frac{d}{a^2} \right) \cos \theta,$$

es decir, $d = a^2 v_0$ y, finalmente:

$$\phi = v_0 r \cos \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]. \quad (2.1)$$

2.1.1. Consecuencias de la solución

De este potencial se deriva el campo de velocidades, con componentes cilíndricas

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = v_0 \cos \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \quad (2.2)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -v_0 \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]. \quad (2.3)$$

Si $r = a$, se puede ver que $v_r = 0$, que es lo que hemos impuesto, y que

$$v_\theta(a, \theta) = -2v_0 \sin \theta.$$

Esto muestra que en los puntos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ la velocidad es nula, lo cual los identifica como **puntos de estancamiento**.

La presión en todo punto puede obtenerse del teorema de Bernouilli, que implica en este caso

$$p_0 + \frac{1}{2} v_0^2 \rho = p(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} v^2 \rho,$$

donde p_0 es la presión lejos del cilindro. Es decir:

$$p(\mathbf{r}) = p_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2),$$

que puede escribirse, con el campo de velocidades anterior:

$$p(\mathbf{r}) = p_0 + \frac{1}{2r^2} \rho v_0^2 \left(2 \cos \theta - \frac{1}{r^2} \right),$$

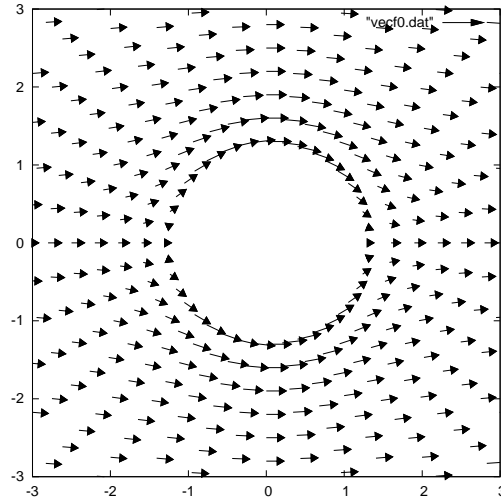


Figura 2.1: Gráfica del campo de velocidades alrededor de un cilindro, a partir de las ecuaciones (2.3) y (2.2). Se ha tomado un retículo equiespaciado en r y θ .

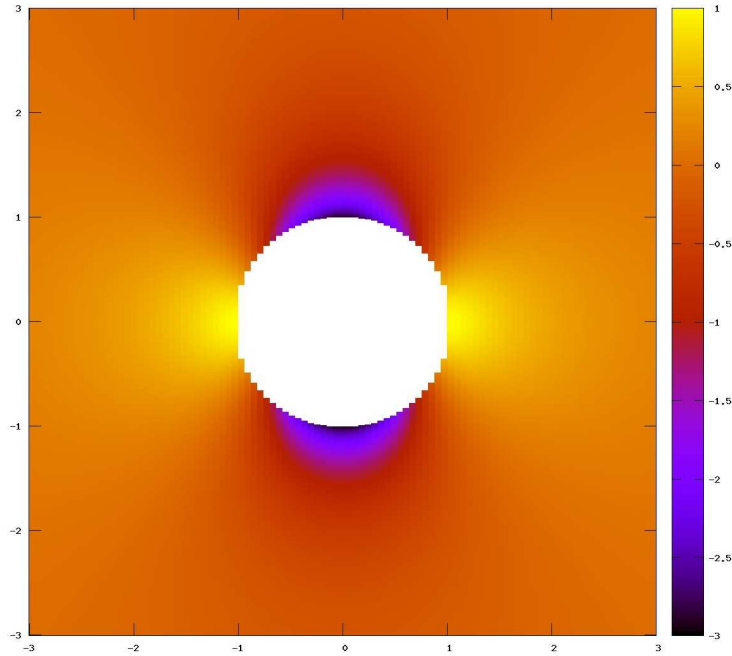


Figura 2.2: Gráfica de $(p(\mathbf{r}) - p_0)/(\rho v_0^2/2)$ frente a \mathbf{r} en unidades del radio del cilindro a , en un rango $[-3, 3] \times [-3, 3]$.

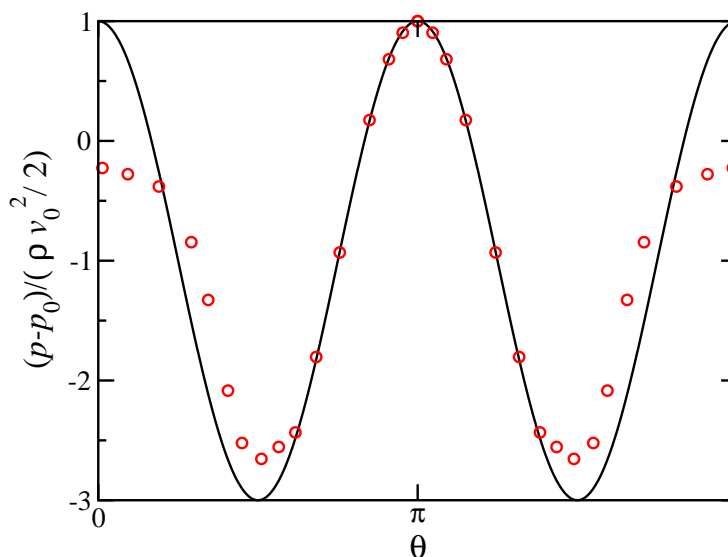


Figura 2.3: Gráfica de $(p(\mathbf{r}) - p_0)/(\rho v_0^2/2)$ sobre la superficie del cilindro. Según se ha definido el problema, $\theta = 0$ corresponde al punto de estancamiento a la derecha del cilindro, desde 0 a π es la superficie de “arriba”, π corresponde al punto de estancamiento a la izquierda (la cara expuesta al flujo), de π a 2π es la superficie de “abajo”. Los círculos representan un resultado típico experimental.

un campo escalar que está dibujado en la figura 2.2.

Para el caso particular $r = a$, en la superficie del cilindro, tendremos la presión superficial:

$$p_s(\theta) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta),$$

donde hemos utilizado la velocidad tangencial de la ecuación (2.3). Esta gráfica se puede ver en la figura 2.3.

Como buena presión, ejerce una fuerza global sobre el cilindro, que puede hallarse por integración sobre la superficie de éste:

$$\mathbf{f} = - \int p \hat{\mathbf{n}} dA,$$

con $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unidad que apunta hacia afuera del cilindro (de ahí el signo menos). Por simetría, la fuerza no tendrá componente z . Para las otras dos es tradicional definir:

$$\mathbf{f} = (D, L, 0),$$

donde D es el **arrastre** (*drag* en inglés) y L es la **elevación** (*lift* en inglés). En coordenadas cilíndricas:

$$D = -la \int_0^{2\pi} p_s \cos \theta d\theta \quad (2.4)$$

$$L = -la \int_0^{2\pi} p_s \sin \theta d\theta, \quad (2.5)$$

donde l es la longitud del cilindro.

Es obvio que las dos magnitudes son cero. Primero, por las propias simetrías de la figura 2.3, o del propio campo de velocidades. También, por el hecho de que involucran integrales de 0 a 2π de $\sin^2 \theta$ multiplicado por $\cos \theta$ o $\sin \theta$, y estas funciones son, precisamente, *ortogonales* ($\sin^2 \theta$ sólo no es ortogonal a $\cos 2\theta$).

Que L sea nulo no debe extrañarnos porque el flujo tiene una completa simetría arriba-abajo. Al hecho de que D también lo sea se denomina *paradoja de D'Alembert*, y tan sólo expresa las limitaciones del modelo de fluido ideal, que desprecia los efectos de la viscosidad. En un fluido real (círculos en la figura 2.3) la presión superficial obtenida no es una mala aproximación en la cara expuesta del cilindro. En la protegida, de hecho, se produce una clara caída de presión que implica, por asimetría izquierda-derecha, un empuje del fluido sobre el cilindro.

2.1.2. Otra solución

Sin embargo, la solución obtenida no es única. Este hecho se debe a que nuestro dominio, que es bidimensional (ya que la coordenada z no juega ningún papel) no es simplemente conexo. Es decir, el cilindro define un "agujero" en él y es posible dibujar contornos de dos tipos. Si un contorno no incluye al cilindro, se puede deformar y hacer desaparecer. Los que contienen al cilindro, en cambio, no pueden hacerse desaparecer, como mucho se pueden adaptar a su superficie.

La otra solución corresponde a un flujo totalmente tangencial, de modo que la condición en la frontera se sigue cumpliendo. Si el flujo es irrotacional la circulación c

$$c = \oint \hat{d}\mathbf{v}.$$

será nula para cualquier contorno del primer tipo, pero no para uno del segundo tipo. Por tanto, si tomamos una circunferencia de radio r tendremos

$$c = 2\pi r v,$$

o

$$v_\theta = \frac{c}{2\pi r}$$

El potencial correspondiente es, de $v_\theta = (1/r)\partial\phi/\partial\theta$,

$$\phi_2 = \frac{c}{2\pi}\theta,$$

que cumple trivialmente la ecuación de Laplace.

Así pues, nuestra solución total será $\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2$. La velocidad radial no se ve afectada, pero la tangencial queda

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -v_0 \sin \theta \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] + \frac{c}{2\pi r}.$$

El campo resultante se dibuja en la figura ???, para el caso $c = -???$ (veremos abajo que la circulación debe ser negativa para tener una ascensión).

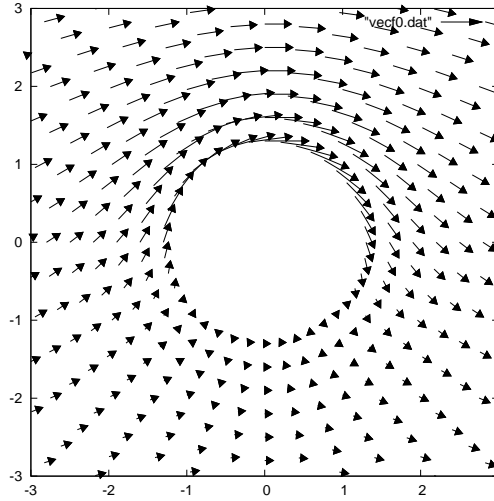


Figura 2.4: Gráfica análoga a la de la figura 2.1, pero para una circulación negativa c tal que $\sin \theta_{\text{est}} = -0,8$.

Para $r = a$ la velocidad será

$$v_{\theta}(a, \theta) = -2v_0 \sin \theta + \frac{c}{2\pi a}.$$

Los puntos de estancamiento corresponden ahora a

$$\sin \theta_{\text{est}} = \frac{c}{4\pi v_0 a}.$$

Es interesante que estos puntos están por debajo de 0 y π (para c negativa), y van bajando según c sube en valor absoluto. Para un valor $c = 4\pi v_0 a$ los dos puntos se unen en la parte inferior del cilindro, y para valores del cilindro este único punto de estancamiento se separa del cilindro.

Una aplicación de la ley de Bernoulli lleva directamente al campo de presiones de la figura 2.5, evidentemente asimétrico en la dirección vertical (con una circulación negativa, la presión es menor en la parte de arriba). Se llega fácilmente a la siguiente ecuación para la presión en la superficie del cilindro:

$$p_s(\theta) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 (1 - 4(\sin \theta - \sin \theta_{\text{est}})^2),$$

dibujada en la figura 2.6. De nuevo, el arrastre D es cero por simetría: la paradoja de d'Alembert sigue aplicándose ya que, como se ha comentado, es un resultado general de los fluidos ideales. Pero la elevación no será a nula; de hecho:

$$L = -4\pi \rho a v_0^2 \sin \theta_{\text{est}} = -\rho v_0 c l.$$

Este resultado es, de hecho, un caso particular del teorema de Kutta y Jowkowsky, que se aplica a superficies arbitrarias, no sólo a cilindros.

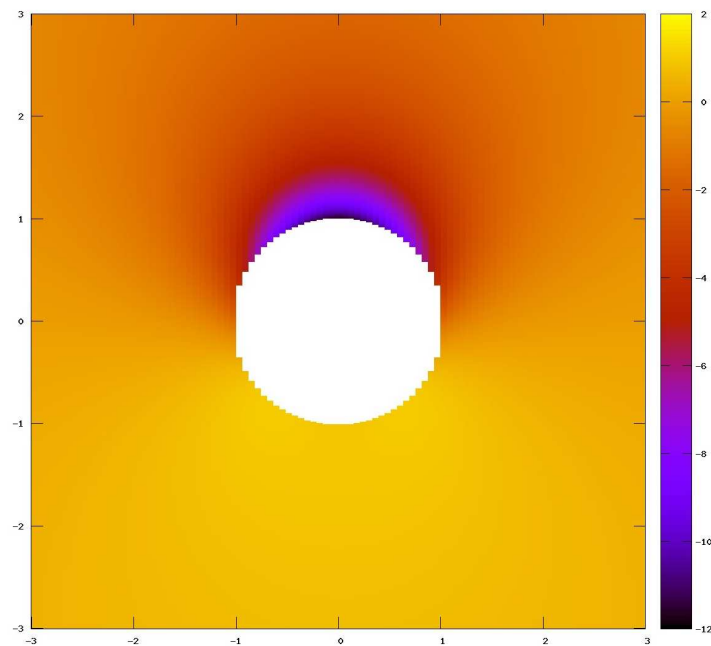


Figura 2.5: Gráfica similar a la de la figura 2.2, pero para una circulación negativa c tal que $\sin \theta_{\text{est}} = -0,8$.

En la figura se han dibujado las curvas que resultan de multiplicar la curva de presión por $\cos \theta$ y por $\sin \theta$. Si integramos sobre todo el dominio la primera de ellas el resultado es cero; esto puede no ser tan obvio de la figura pero el análisis de Fourier nos lo confirma. Lo que está claro es que la integral de la segunda curva no es cero en absoluto y debe producir cierta elevación L .

El resultado explica de manera semicuantitativa el fenómeno de que los objetos puedan elevarse cuando están inmersos en un fluido con un campo de velocidades heterogéneo. Este estado de cosas puede obtenerse experimentalmente, al menos aproximadamente, haciendo incidir una corriente sobre un cuerpo. Alternativamente, puede hacerse que el cuerpo rote sobre sí mismo, con lo cual arrastrará consigo al fluido (aunque para esto debemos echar mano a la viscosidad) y la situación será similar a la estudiada. En este último caso se habla de fuerza de Magnus.

2.1.3. Otros aspectos

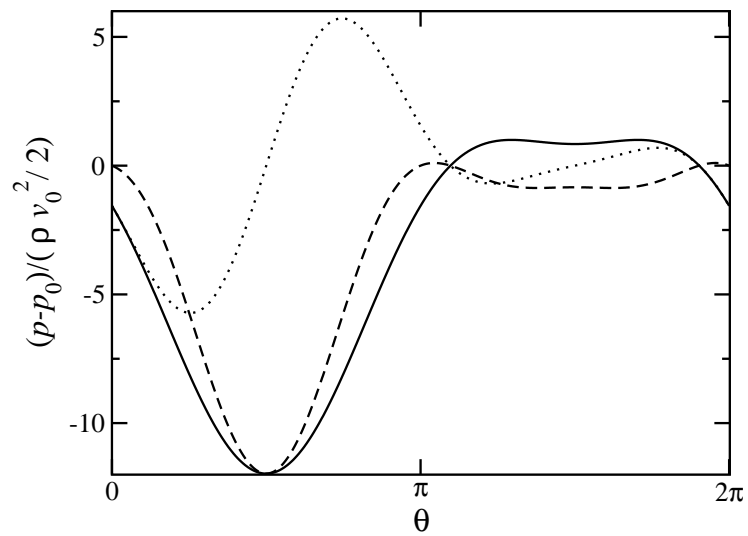


Figura 2.6: Gráfica similar a la 2.3, pero para una circulación negativa c tal que $\sin \theta_{\text{est}} = -0,8$. La línea a puntos se obtiene multiplicando por $\cos \theta$ y la a trazos por $\sin \theta$.

Capítulo 3

Ondas de sonido

3.1. Derivación

Consideramos pequeñas perturbaciones (“modulaciones”) de la densidad y la presión alrededor de sus valores promedios:

$$\begin{cases} \rho \approx \rho_0 + \rho' \\ p \approx p_0 + p' \end{cases} \quad (3.1)$$

Pero ρ' y p' no son independientes, de hecho están relacionadas por

$$p' = p - p_0 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) = \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho', \quad (3.2)$$

donde se hace un uso elemental de la serie de Taylor de la función p en función de ρ (o sea, la ecuación de estado). La derivada se considera evaluada en $\rho = \rho_0$, y bajo las condiciones termodinámicas adecuadas (lo cual puede ser algo delicado, como se discute más adelante).

Linearizando las ecuaciones, resulta que:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho', \quad (3.3)$$

con la velocidad del sonido dada por

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (3.4)$$

3.2. El número de Mach

Se ha mencionado que la suposición de incompresibilidad tiene que ver, en términos prácticos, con que la velocidad típica de un problema sean pequeñas en relación con la velocidad del sonido. Esta razón entre la velocidad típica y la velocidad del sonido se llama “número de Mach”:

$$M = \frac{v_0}{c}$$

y aparece de manera natural cuando las ecuaciones se plantean en dimensiones naturales, con “las magnitudes reducidas”. Así pues, primero analicemos cómo introducir estas dimensiones naturales sistemáticamente.

3.2.1. Análisis dimensional

La elección de un juego de unidades “naturales” debe tener en cuenta el hecho de que no todas ellas son independientes. Si tenemos un juego inicial

$$\begin{cases} \text{longitud} & l_0 \\ \text{tiempo} & t_0 \\ \text{densidad} & \rho_0, \end{cases}$$

Entonces la velocidad tendrá como unidades, obviamente, l_0/t_0 , y la presión (no tan obviamente), $\rho_0 v_0^2$:

$$\begin{cases} \text{velocidad} & v_0 = l_0/t_0 \\ \text{presión} & p_0 = \rho_0 v_0^2 \end{cases}$$

En término de estas unidades, la ecuación de conservación (1.1) queda

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}(\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (3.5)$$

igual pero con “gorros” en todas las magnitudes. Es importante que el propio operador ∇ debe reducirse con sus unidades propias (de inversa de longitud). Algo similar pasa con la ecuación de Euler (1.2): se satisface con todas las magnitudes reducidas.

3.2.2. Sonido e incompresibilidad

Ahora estamos en condiciones de expresar todas las ecuaciones anteriores en unidades naturales. Por ejemplo, la ecuación del sonido (3.3) en dimensiones naturales es:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \left(\frac{c}{v_0}\right)^2 \nabla^2 \rho' = \frac{1}{M^2} \nabla^2 \rho',$$

donde el número de Mach M aparece de manera natural.

La conexión de M con la incompresibilidad procede como sigue. Primero, consideremos, como en la sección §3.1, pequeñas modulaciones de densidad y presión. Las ecs. (3.1) pueden escribirse de manera reducida:

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \approx \frac{\rho_0 + \rho'}{\rho_0} = 1 + \frac{\rho'}{\rho_0} = 1 + \tilde{\rho}' \\ p \approx \frac{p_0 + p'}{p_0} = 1 + \frac{p'}{p_0} = 1 + \tilde{p}', \end{cases} \quad (3.6)$$

donde, abusando un poco de la notación, $\tilde{\rho}'$ sería una pequeña modulación de la densidad en unidades reducidas. Por ser unidades reducidas, estas modulaciones son necesariamente en torno del número 1. Ahora recordemos que ρ' y p' están relacionadas por la ecuación (3.2):

$$p' = c^2 \rho',$$

donde hemos escrito la proporcionalidad como c^2 , utilizando la velocidad de sonido dada por la ec. (3.4). En unidades reducidas esta relación es

$$\tilde{p}' = \left(\frac{c}{v_0}\right)^2 \tilde{\rho}' = \frac{1}{M^2} \tilde{\rho}';$$

o sea, $\tilde{\rho}' = M^2 \tilde{p}'$, lo cual ya da una idea de que si M es pequeño la densidad cambia poco con la presión.

La ecuación de conservación en unidades reducidas, ec. (3.5), queda con las modulaciones de las ecs. (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1 + \tilde{\rho}')}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}((1 + \tilde{\rho}')\tilde{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{\rho}'}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}(\tilde{\rho}'\tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\nabla}(\tilde{\mathbf{v}}) &= 0. \end{aligned}$$

En términos de la presión y la velocidad esta ecuación queda:

$$\tilde{\nabla}(\tilde{\mathbf{v}}) + M^2 \left[\frac{\partial \tilde{p}'}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla}(\tilde{p}'\tilde{\mathbf{v}}) \right] = 0.$$

Ahora debería quedar claro que, al menos en este límite de pequeñas modulaciones, el término entre corchetes es despreciable si $M \ll 1$, *incluso* si la presión no es constante espacial o temporalmente. En este límite la densidad sí es aproximadamente constante, como hemos visto; pero además la propia ecuación de continuidad queda reducida a

$$\tilde{\nabla}\tilde{\mathbf{v}} = 0,$$

justamente la expresión de la incompresibilidad, ec. (1.3).

Se puede hacer el mismo tratamiento de la ecuación de Euler con idéntico resultado.