Relatividad Matemática

Marc Mars

¿Qué es la Relatividad Matemática?

Relatividad General: Teoría física que describe la interacción gravitatoria.

Campo gravitatorio ≈ alteración de las propiedades geométricas del espacio-tiempo.
Objetos primarios: variedad cuadridimensional + métrica espacio-temporal.

- ► Lenguaje natural: geometría diferencial.

Teoría física muy distinta al resto de las que conocemos:

- ► Aparato matemático complejo: geometría, topología, análisis geométrico…
- ► Algunos de los problemas que trata pueden ser formulados en términos matemáticos muy precisos (ejemplos más adelante…).

Posible definición:

Relatividad Matemática: Estudio de problemas físicos en relatividad general mediante métodos matemáticos rigurosos.

Disciplina a caballo entre física y matemáticas (o al revés).

Breves apuntes históricos

Concepto de Relatividad Matemática → bastante reciente.

Primera aparición en el título de un congreso: Canberra Conference on Mathematical Relativity 1988

► Común en la actualidad.

¿Es una tardanza causal o esconde algún motivo más importante?

Relatividad General → Fundamentos desarrollados por Einstein entre 1905 y 1916.

► Principio físico fundamental: principio de equivalencia.
Einstein ya lo había postulado en 1907.

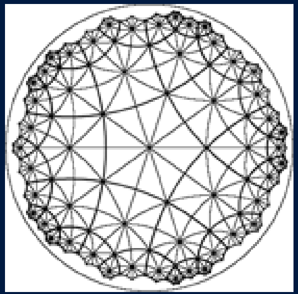
► Necesitó aprender cálculo tensorial y geometría diferencial: Marcel Grossmann.

Este lenguaje era nuevo para la mayor parte de los físicos de la época.

► Grandes avances en geometría durante el siglo XVIII y sobre todo el XIX:

Beltrami Euler Lobachevskii Christoffel

Clifford Gauss



Klein Ricci-Curbastro

Levi-Cività Riemann

Poincaré

Bolyai

Primeros desarrollos de la Relatividad General

La Relatividad era por encima de todo una teoría física:

Los matemáticos puros no mostraron excesivo interés en esta nueva teoría:

Razón fundamental:

► Signatura de la métrica "extraña" {-,+,+,+} AD HOC
¿ Por qué no cualquier otra signatura?

El signo – de la signatura es lo único que distingue tiempo y espacio → DISTINCIÓN FUNDAMENTAL

Algunos matemáticos sí mostraron interés en la Relatividad desde un primer momento:

Hermann Minkowski

Hermann Weyl

Willem De Sitter

Los físicos no comprendían bien el alcance geométrico de la teoría:

Ejemplo ilustrativo: Colapso gravitatorio esférico.

Geometría de Schwarzschild

Ecuaciones de Einstein: $$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$ (Nov. 1915)

Ecuaciones diferenciales no lineales para diez funciones (componentes de la métrica)
► Einstein era escéptico sobre la posibilidad de encontrar soluciones.

Enero 1916: El físico Karl Schwarzschild encuentra la primera solución a estas ecuaciones.

Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

$$-\infty < t < +\infty, \quad r > 2GM, \quad (\theta, \phi) \in S^2$$

La métrica no esta definida en r = 2 G M
(es una esfera de área $16 \pi G^2 M^2$, no es un punto!).

Se bautizó como *Singularidad de Schwarzschild* (actualmente Radio de Schwarzschild).

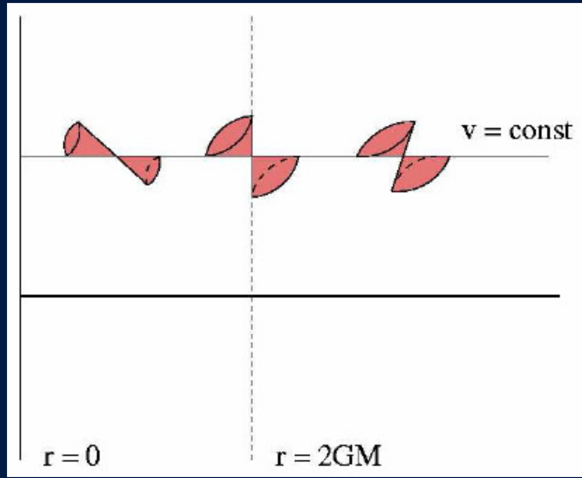
¿Cuál era la interpretación de ésto?

Coordenadas de Eddington (-Finkelstein)

1924: Coordenadas de Eddington (-Finkelstein):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

$$-\infty < v < +\infty, \quad r > 0, \quad (\theta, \phi) \in S^2$$



Una partícula en reposo r = 2 G M, se mueve a la velocidad de la luz. Toda partícula masiva en r = 2 G M debe moverse hacia valores menores de r.

► La superficie r = 2 G M sólo deja pasar partículas en una dirección.

No hay fuerza capaz de mantener a una estrella de radio menor o igual que 2 G M en reposo → Colapso gravitatorio.

Eddington:

``Various accidents may intervene to save the star, but I want more than that. I think there should be a law of Nature to prevent a star from behaving in such an absurd way!"

Problema de Cauchy en R.G.

Problema de Cauchy para cualquier teoría fisica:

Dadas una condiciones iniciales "adecuadas"

1. Existe una solución a las ecuaciones.
2. Es única.
3. Depende de forma continua de los datos.

La teoría satisface el **principio de predictabilidad.**

Ejemplo: Leyes de Newton

Analogía Electromagnética:

Más simple que la Relatividad General:

- ► Sistemas de referencia privilegiados (inerciales).
- ► Ecuaciones lineales.
- ► Menor número de variables.

Una similitud fundamental : Es una teoría con libertad gauge $\longrightarrow$ **ligaduras**

Ecuaciones de Maxwell
(en el vacío)

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \vec{E} - \nabla \times \vec{B} &= 0 \\ \partial_t \vec{B} + \nabla \times \vec{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ecuaciones de evolución.}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Ligaduras.} \qquad t = 0$$

Datos iniciales sujetos a ligaduras

La evolución dicta si las ligaduras se satisfacen idénticamente o bien si el sistema es incompatible.

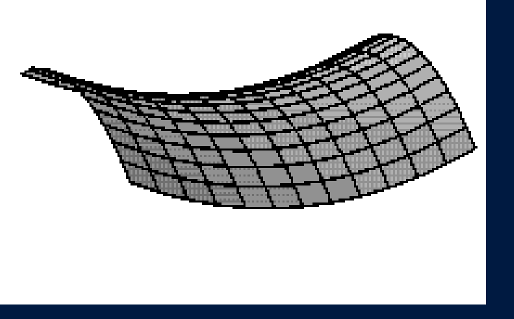
$$Z \equiv \nabla \cdot \vec{E}, \qquad \partial_t Z = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right) \equiv 0 \qquad \Rightarrow Z = 0 \quad \forall t \qquad \surd$$

Relatividad General:

- Incógnita = Métrica g
- Ecuaciones diferenciales de 2º orden
  - Datos iniciales = "métrica en t = 0 + derivada temporal de la métrica en t = 0"

Geométricamente:

- Hipersuperficie espacial (el espacio inicial)
- Métrica inducida (métrica Riemanniana 3-dim) h_{ij}
- Segunda forma fundamental (derivada normal de la 3-métrica) K_{ij}



Datos de Cauchy: (Σ, h_{ij}, K_{ij})

Ecuaciones de Einstein de vacío: $R_{\alpha\beta} = 0 \quad \longleftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \partial_t h_{ij} &= \dots \\ \partial_t K_{ij} &= \dots \end{aligned}\right\}$$

Ecuaciones de evolución.

$$\left.\begin{aligned} R(h) - K^{ij}K_{ij} + K^2 &= 0, \\ D_i K^i_j - D_j K &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad K = h^{ij} K_{ij}$$

Ligaduras.

Estas ecuaciones no tienen solución única (problema de Cauchy mal puesto).

Motivo doble: (1) covariancia bajo difeomorfismos del espacio-tiempo.

(2) Existe una infinidad de maneras de dividir un espacio-tiempo en espacio + tiempo.

Teorema (**Choquet-Bruhat 1952**) *El problema de Cauchy para las ecuaciones de Einstein de vacío admite una solución, única excepto difeomorfismos y que depende de forma continua de los datos iniciales.*

Generalización con materia: Campo escalar, campo electromágnetico, Yang-Mills, fluidos perfectos …

Teoremas de Singularidades

► Teorema de existencia de las ecuaciones de Einstein se refiere a existencia local en el tiempo.
► En Schwarzchild, el espacio-tiempo tiene un intervalo de existencia finito (singularidad).

Una partícla masiva en reposo en $r = 2\,G\,M$ tarda un tiempo $\tau = \pi\,G\,M$ en llegar a $r = 0$.

Agujero negro de igual masa que el Sol $\tau = 0.3$ ms.

Singularidad = Espacio-tiempo deja de existir.

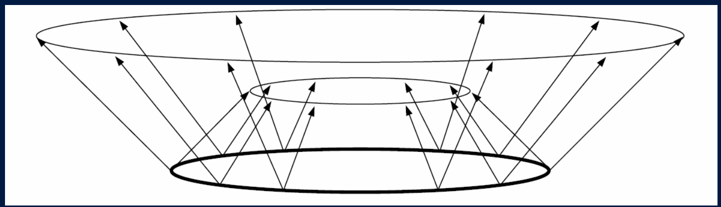
¿Es una situación común o es consecuencia de la simetría esférica?

Si el campo gravitatorio llega a ser suficientemente intenso entonces las singularidades son inevitables.

Una posible medida de intensidad: ¿hay superficies atrapadas?

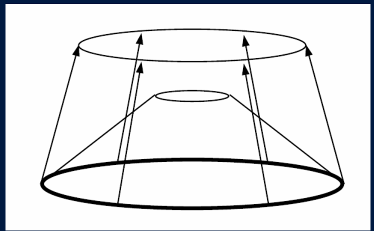
Dos haces de luz simultáneos:
Uno hacia afuera, otro hacia adentro.

Superficie "normal":



$\left\{\begin{array}{l}\text{Hacia adentro: área decrece}\\ \text{Hacia afuera: área crece}\end{array}\right.$

Superficie "atrapada":



$\left\{\begin{array}{l}\text{Hacia adentro: área decrece}\\ \text{Hacia afuera: área ¡decrece!}\end{array}\right.$

Condición de causalidad que evita viajar en el tiempo:

- Físicamente razonable.
- Se puede relajar.

Teorema (**Hawking & Penrose 1970**) *Sea $(\mathcal{M}, g)$ un espacio-tiempo que satisface las cuatro condiciones siguientes:*

El campo gravitatorio es atractivo.

(a) No existen curvas temporales cerradas,

(b) $(\mathcal{M}, g)$ satisface la condición de convergencia temporal $R_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq 0$, $\forall v^\alpha$ temporal,

(c) $(\mathcal{M}, g)$ satisface la condición de genericidad,

Toda geodésica temporal o luminosa siente la acción del campo gravitatorio en algún momento (condición algebraica sobre el tensor de Riemann).

(d) $(\mathcal{M}, g)$ contiene una superficie atrapada.

Entonces $(\mathcal{M}, g)$ contiene al menos una geodésica temporal o luminosa inextendible e incompleta.

El campo gravitatorio es suficientemente intenso

$$\left.\begin{array}{l}\text{No especifica si es una geodésica o muchas.}\\ \text{Si la curvatura diverge o no.}\\ \text{Si la singularidad es futura o pasada}\end{array}\right\}\ \text{Se sabe poco del tipo de singularidad}$$

$$\text{Existen otras versiones del teorema de singularidades: }\left\{\begin{array}{l}\text{Otras condiciones de causalidad.}\\ \text{Otras condiciones de campo gravitatorio intenso.}\end{array}\right.$$

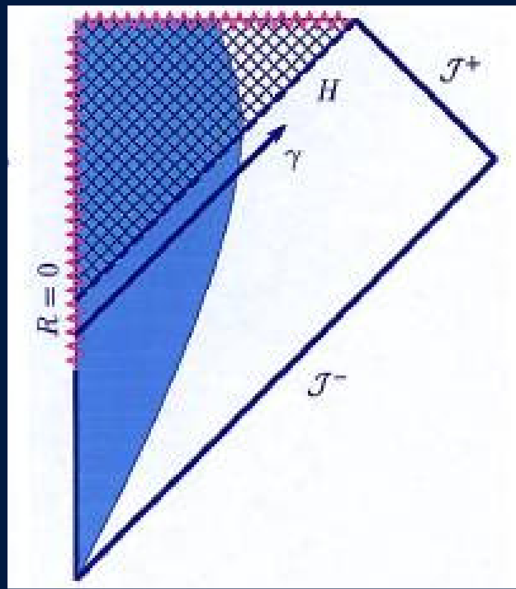
Conjetura de la censura cósmica

► Las singularidades son comunes en relatividad general (teoremas de singularidades).

Singularidad: Por definición fuera del espacio-tiempo $\Rightarrow$ { Ningún control sobre lo que puede salir de ella.

Problemas serios con la predictabilidad de la teoría: $\approx$ Unicidad global de la solución de las ecuaciones de Einstein.

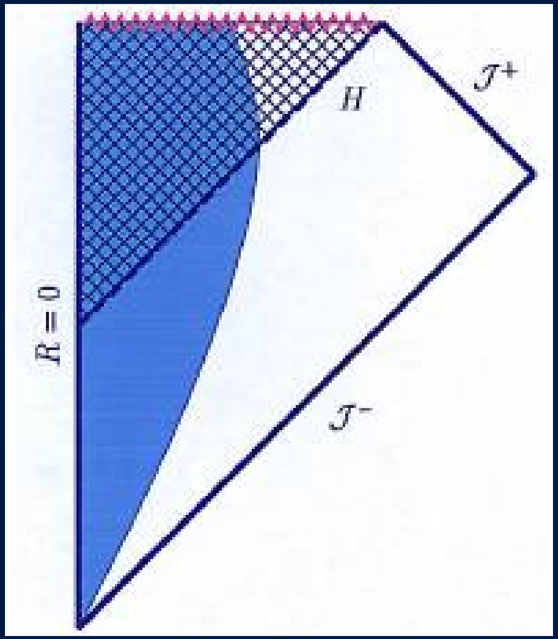
La geodésica γ puede enviar información desde la singularidad hasta regiones asintóticas $\longrightarrow$ Cambiar el espacio-tiempo.



Penrose (1969) propuso que esto se podía evitar si se excluían las singularidades "desnudas".

Hipótesis de la censura cósmica (versión intuitiva): El colapso gravitatorio de cualquier cuerpo nunca da lugar a una singularidad desnuda sino a un agujero negro.

≈ todas las singularidades están ocultas dentro de un horizonte de sucesos y no pueden ser vistas por observadores lejanos.



Existen algunos contraejemplos, pero muy especiales (mucha simetría).

En simetría esférica, materia = campo escalar sin masa
La conjetura es cierta excepto para un conjunto de datos iniciales de medida nula.

Christodoulou 1999

Conjetura de la censura cósmica: Para un conjunto de datos iniciales "genérico" el problema de Cauchy de las ecuaciones de Einstein admite una solución maximal única.

Muy pocos resultados a favor o en contra.

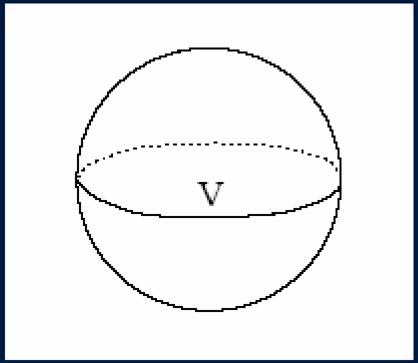
► Uno de los problemas abiertos más importantes en relatividad matemática.

Teoremas de unicidad de agujeros negros

Supongamos que un agujero negro tiende a llegar a un estado de equilibrio (Problema abierto).

Importante: conocer los estados de equilibrio de las soluciones de agujero negro.

Analogía con las pompas de jabón:



Después de oscilar un rato llega a un estado de equilibrio: una esfera.

Solución con mucha simetría y pocos parámetros (radio).

Teorema (**versión intuitiva**) *La geometría de un agujero negro de vacío, estacionario y asintoticamente plano sólo depende de dos parámetros: la masa total y el momento angular total.*

Te

estático y asintóticamente plano es isométrico al espacio-tiempo de Schwazschild.

Israel 1967 : horizonte de sucesos conexo (un único agujero negro) y no degenerado
+ hipotesis técnicas → (Müller zum Hagen, Robinson, Seifert 1973).

Bunting y Masood-ul-Alam 1987: horizonte de sucesos no conexo y no degenerado
Técnica totalmente nueva (usa el teorema de positividad de la energía).

Chruściel 1999: horizonte degenerado (usa una versión modificada del teorema de positividad).

Asintoticidad Plana

Hipersuperficie t = 0 en Schwarzschild:

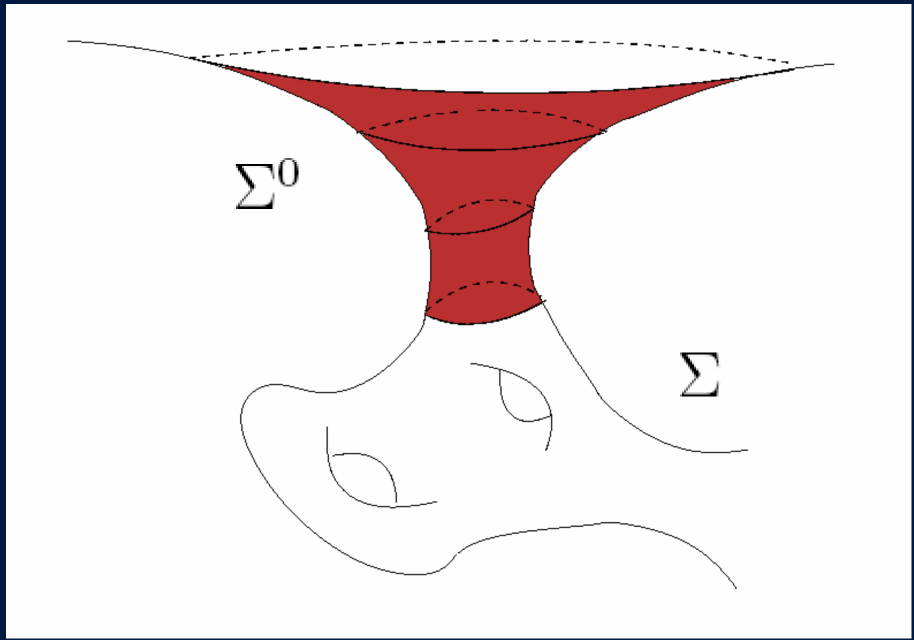
$$h_{ij} = \frac{dr^2}{1-\frac{2GM}{r}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) = \underbrace{dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)}_{\text{Métrica Euclídea}} + \underbrace{O\left(1/r\right)}_{\text{Desviación}}$$

$$K_{ij} = 0$$

Definición 1 *Un dato de Cauchy* (Σ, h_{ij}, K_{ij}) *se llama asintóticamente plano si existe un abierto* $\Sigma^\infty \subset \Sigma$ *difeomorfo a* $(\mathbb{R}^3 \setminus B(r), \delta_{ij})$ *tal que, en las coordenadas cartesianas* $\{x, y, z\}$,

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O\left(1/r\right),$$
$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} = O(1/r^2),$$
$$K_{ij} = O(1/r^2).$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



Energía y cuadrimomento total (ADM)

La energía del campo gravitatorio no se puede localizar $\longleftarrow$ Principio de equivalencia

Movimiento de las partículas libres muy alejadas. $\Longrightarrow$ El parámetro M en la métrica de Schwarzschild es la masa-energía total de la masa puntual + campo gravitatorio.

¿Existe el concepto de energía total de la materia + el campo gravitatorio en general?

Sí, cuando el espacio-tiempo es asintóticamente plano.

Definición 2 (Arnowitt, Deser, Misner 1962) *La energía total E y el momento lineal total $\vec{P}$ de un dato de Cauchy (Σ, h_{ij}, K_{ij}) asintóticamente plano vienen dados por las integrales*

$S_r =$ Esfera coordenada de radio r.

$$E(=P^0) = \frac{1}{16\pi G} \lim_{r\to\infty} \sum_{i=1}^{3} \int_{S_r} \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ii}}{\partial x^j} \right) dS^j$$

$$P^i = \frac{1}{8\pi G} \lim_{r\to\infty} \sum_{i=1}^{3} \int_{S_r} \left(K^i_j - K\delta^i_j \right) dS^j$$

Definición en términos de coordenadas (no covariante)

¿Es un objeto geométrico? Si

Se puede definir la masa total como en relatividad especial: $M^2 = E^2 - \vec{P}^{\,2}$

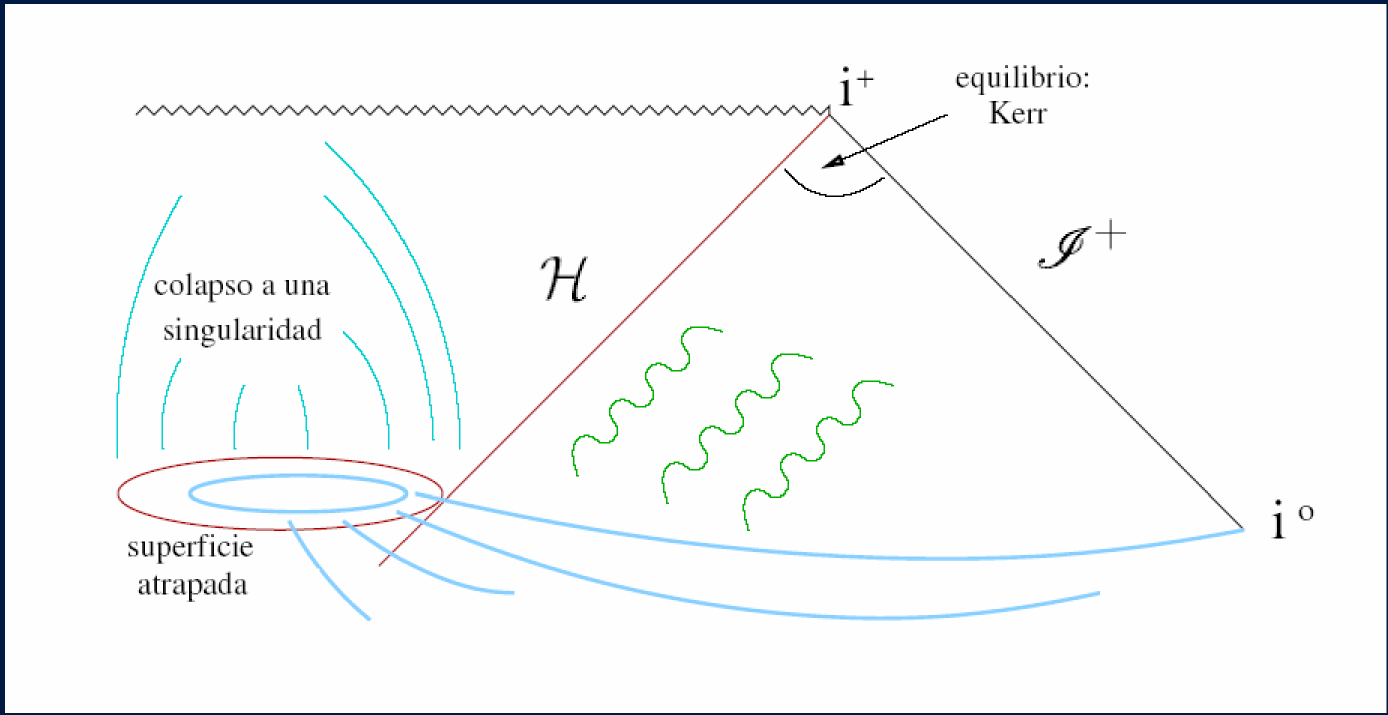
esigualdad de Penrose

Penrose inventó el término censura cósmica, pero dudaba de su validez.

Si la censura cósmica es cierta $\rightarrow$ debe ser cierta una desigualdad más fuerte que M>0.

Argumento heurístico de Penrose:

Desigualdad de Penrose



$$\frac{A_0}{16\pi G^2} \leq \frac{A_{\mathcal{H}_0}}{16\pi G^2} \leq \frac{A_{\mathrm{Kerr}}}{16\pi G^2} \leq M^2_{\mathrm{Kerr}} \leq M^2_{ADM}$$

Conjetura de Penrose: $M \geq \sqrt{\frac{A_0}{16\pi G^2}}$

Condición sólo sobre los datos de Cauchy.
Independiente de la validez de la censura cósmica.

Es una versión más fuerte que el teorema de positividad de la masa cuando hay agujeros negros.

Un agujero negro tiene una masa mínima que vale $\sqrt{\frac{A_0}{16\pi G^2}}$

Se ha podido demostrar en el caso $K_{ij} = 0$

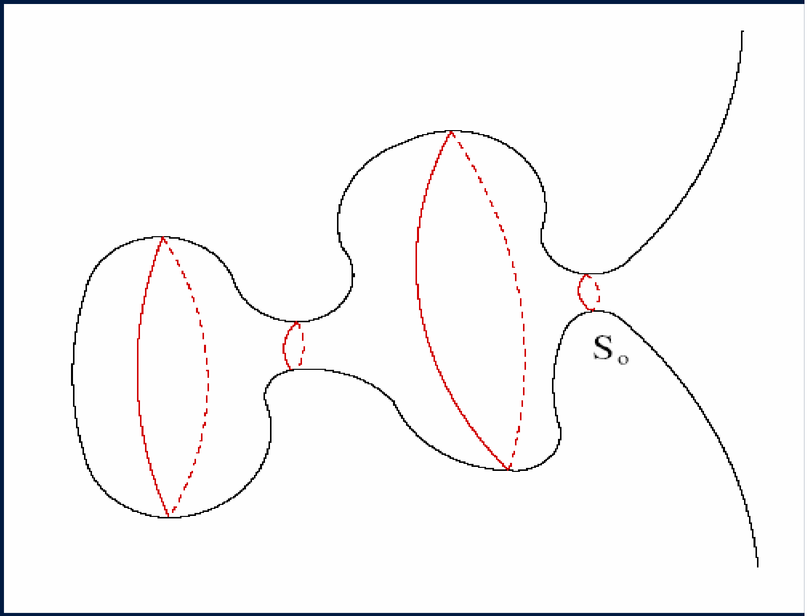
$R(h) \geq 0 \approx$ Condición de energía dominante.

Teorema (**Huisken & Ilmanen 2001, Bray 2001**)

Sea (Σ, h) una variedad 3-dimensional, completa, asintóticamente plana y con curvatura escalar no-negativa.
Si (Σ, h) contiene una superficie minimal cerrada que engloba a cualquier otra y que tiene área A_0, entonces

$$M \geq \sqrt{\frac{A_0}{16\pi G^2}}.$$

Además la igualdad solamente se satisface para la hiper-superficie $t = const$ de la métrica de Schwarzschild.



Diagramas de Penrose

Propiedades Principales:

- Mantiene los ángulos pero no las distancias.
- Representa regiones infinitas en diagramas finitos.
- Cada punto representa típicamente una superficie bidimensional (normalmente una 2-esfera).
- Permite una visualización intuitiva del espacio-tiempo.

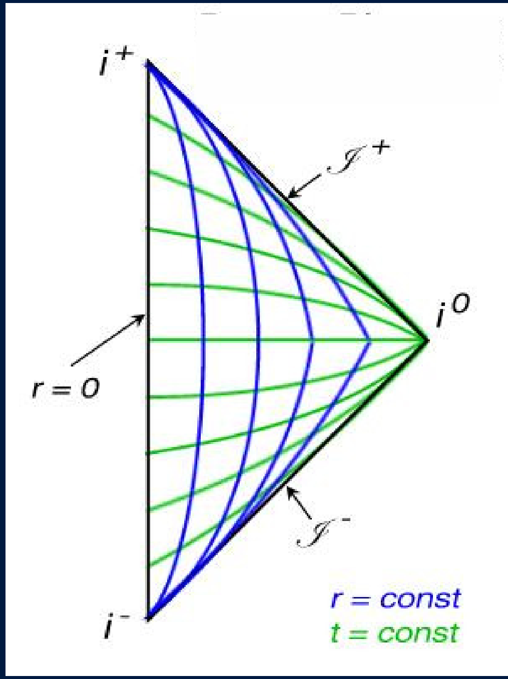
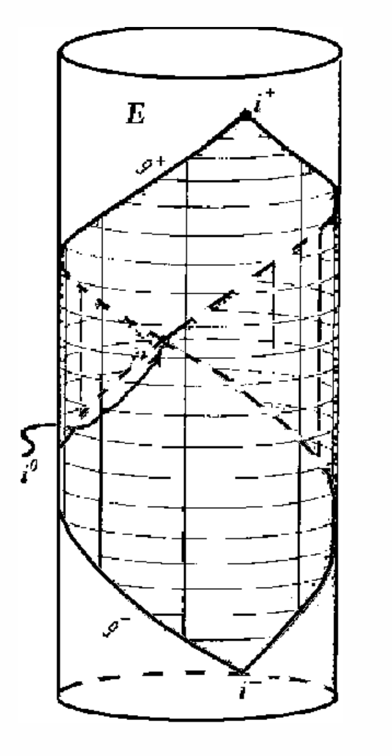


Diagrama de Penrose del espacio de Minkowski:



- Cilíndro $= S^1 \times \mathbb{R}$, representa $S^3 \times \mathbb{R}$ (*Universo Estático de Einstein.*)

- $i^0 \sim$ *infinito espacial* (punto final de toda curva espacial con aceleracion finita).
- $i^+ \sim$ *infinito temporal* (punto final de toda curva temporal futura con aceleración finita).
- $\mathscr{I}^+ \sim$ *infinito luminoso*, $S^2 \times \mathbb{R}$ (punto final de toda geodésica luminosa).