

# ECUACIONES DIFERENCIALES

Fabricio Macia

2007

Disponible en: <http://dcain.etsin.upm.es/fabricio/Docencia.html>







# Índice general

<b>1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en dimensión <math>d = 1</math></b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. La ecuación autónoma unidimensional . . . . .	2
1.3. ¿Cuándo la solución es única? . . . . .	7
1.4. La desigualdad de Gronwall . . . . .	9
1.5. Prolongabilidad de soluciones. . . . .	11
1.6. Órbitas, diagrama de fases, estabilidad . . . . .	13
1.7. La ecuación lineal no autónoma . . . . .	15
1.8. Ecuaciones lineales con coeficientes periódicos . . . . .	18
<b>2. Existencia de soluciones</b>	<b>21</b>
2.1. Algunas observaciones generales . . . . .	21
2.2. El problema de Cauchy: existencia . . . . .	23
2.2.1. Convergencia del método de Euler . . . . .	25
2.2.2. Demostración del Teorema de Ascoli-Arzelà . . . . .	28
2.3. Iteraciones de Picard . . . . .	30
<b>3. Sistemas Lineales</b>	<b>35</b>
3.1. Ecuaciones lineales . . . . .	35
3.1.1. Cálculo a través del método de Euler . . . . .	35
3.1.2. Cálculo a través del método de las aproximaciones sucesivas . . . . .	36
3.1.3. Normas y convergencia en el espacio de matrices . . . . .	37
3.1.4. La exponencial de una matriz . . . . .	38
3.2. Cálculo de $e^{tA}$ . . . . .	38
<b>4. Dependencia continua y prolongabilidad</b>	<b>43</b>
4.1. La desigualdad de Gronwall: un nuevo enfoque a la unicidad . . . . .	43
4.2. La desigualdad de Gronwall: dependencia continua del dato inicial . . . . .	45
4.3. La desigualdad de Gronwall: dependencia continua del campo de vectores . . . . .	46
4.4. Soluciones maximales . . . . .	49

<b>5. Introducción a la teoría cualitativa</b>	<b>55</b>
5.1. Flujo . . . . .	55
5.2. Órbitas . . . . .	59
5.3. Diagrama de fases . . . . .	62
5.3.1. Reparametrización . . . . .	62
5.3.2. Cambios de coordenadas . . . . .	64
5.4. Estructura local de las órbitas . . . . .	67
<b>6. Estabilidad</b>	<b>69</b>
6.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	69
6.1.1. Ecuaciones lineales . . . . .	70
6.1.2. El caso general: el principio de linealización . . . . .	72
6.2. Conjuntos $\omega$ -límite . . . . .	73
6.3. Funciones de Liapunov . . . . .	75
6.4. Demostración del Teorema 6.1.7 . . . . .	77
<b>7. Algunos ejercicios</b>	<b>79</b>

# Capítulo 1

## Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en dimensión $d = 1$

### 1.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

donde hemos utilizado la notación  $\dot{x}$  para denotar la derivada de la función  $x(t)$  respecto de  $t$ . Una **solución** de (1.1) es una función real  $x(t)$ , derivable en un intervalo de la recta real en el que satisface la relación (1.1).

En general, (1.1) posee un número infinito de soluciones. Para constatarlo, basta examinar la más simple de las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}(t) = f(t), \quad (1.2)$$

para, pongamos,  $f \in C(\mathbf{R})$ . Si  $F(t)$  es una primitiva de  $f(t)$  – es decir  $F'(t) = f(t)$  – entonces cualquier función

$$x(t) = F(t) + C, \quad C > 0,$$

es solución de la ecuación (1.2). No obstante, dados valores  $t_0, x_0 \in \mathbf{R}$  existe una única solución que verifica  $x(t_0) = x_0$ , concretamente:

$$x(t) = F(t) + x_0 - F(t_0).$$

Así, uno de los objetivos fundamentales de este curso será estudiar las soluciones del **problema de valor inicial** o **problema de Cauchy**:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}} \quad (1.3)$$

para  $f$  definida en un subconjunto de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  a valores en  $\mathbf{R}$ . El valor  $x_0$  se conoce como el **dato inicial**, mientras que nos referiremos a  $t_0$  como al **instante inicial**.

En general no es posible encontrar una fórmula explícita para las soluciones de (1.3) – siempre que exista al menos una. Por ello, es necesario estudiar dichas soluciones de una forma indirecta, a partir de la propia ecuación. Hay tres cuestiones esenciales que han de ser tratadas prioritariamente.

1. **Existencia de soluciones.** Antes de poder hablar de soluciones, es necesario saber que éstas existen. Como veremos más adelante, la existencia de soluciones del problema de valor inicial (1.3) está íntimamente relacionada con la regularidad de la función  $f$  que define la ecuación; en general, la continuidad de  $f$  garantiza que existe al menos una solución del problema de Cauchy.
2. **Unicidad de soluciones.** Pese a que la ecuación diferencial (1.1) puede tener infinitas soluciones, cabe esperar que exista sólo una que satisfaga la **condición inicial**  $x(t_0) = x_0$ . Veremos que no todas las ecuaciones gozan de esta propiedad. En general, la unicidad de soluciones está, al igual que la unicidad, ligada a la regularidad de la función  $f$ . Probaremos más adelante que una condición que garantiza que el problema de valor inicial (1.3) tiene una única solución es que la función  $f$  sea derivable.
3. **Prolongabilidad de soluciones.** Nuestro siguiente paso en el análisis del problema de Cauchy será determinar el mayor intervalo en el que la solución de (1.3) está definida. Como veremos, dicho intervalo no siempre coincide con la recta real. Comprobaremos que para que esta cuestión está ligada con el comportamiento en el infinito de la función  $f$ .

## 1.2. La ecuación autónoma unidimensional

Diremos que una ecuación diferencial ordinaria (1.1) es **autónoma** si la función  $f$  no depende explícitamente de  $t$ . Estudiaremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in U, \end{cases} \quad (1.4)$$

siendo  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  una función definida en un intervalo  $U \subset \mathbf{R}$ . Las ecuaciones autónomas poseen una propiedad interesante:

**Observación 1.2.1** Si  $x(t)$  es una solución de (1.4) definida, pongamos, para todo  $t \in \mathbf{R}$ , entonces, la función  $y(t) := x(t - a)$  es también una solución sea cual sea  $a$ .



Por tanto, basta estudiar el problema de valor inicial (1.4) para el tiempo inicial  $t_0 = 0$ . Es importante recalcar que esta propiedad puede no ser cierta para la ecuación más general (1.3).

**Ejercicio 1.2.2** Encuéntrese una función  $f(t, x)$  y una solución  $x(t)$  de  $\dot{x} = f(t, x)$  con la propiedad de que  $x(t + a)$  no es solución de la ecuación diferencial para ningún  $a \neq 0$ .

Comencemos nuestro análisis examinando algunos ejemplos sencillos:

**1. Ecuación lineal con coeficientes constantes:**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Este problema de valor inicial posee una solución:<sup>1</sup>

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

que además está definida para todo  $t \in \mathbf{R}$ .

**2. Existencia local; pero no global:**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)^2, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Procediendo como en el apartado anterior, deducimos que una solución de este problema de valor inicial es:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Si  $x_0 > 0$  entonces la solución está definida únicamente en  $(-\infty, 1/x_0)$ ; no es posible prolongar esta solución a un intervalo mayor, puesto que

$$\lim_{t \rightarrow 1/x_0^-} x(t) = +\infty.$$

---

<sup>1</sup>La fórmula es consecuencia del siguiente cálculo:

$$\frac{\dot{x}}{x} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \log x = \frac{d}{dt} at \quad \Rightarrow \quad \log x(t) - \log x(0) = at \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) e^{at}.$$

Esta es la única solución del problema de valor inicial. Si existiera otra solución  $y(t)$  con  $y(0) = x_0$  entonces se tendría:

$$\frac{d}{dt} (y(t) e^{-at}) = (\dot{y}(t) - ay(t)) e^{-at} = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) e^{-at} = y(0) e^{-a \cdot 0} = x_0.$$

3. **Existencia; pero no unicidad:** una solución de la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{x(t)}, \\ x(0) = x_0 \in [0, \infty) \end{cases} \quad (1.5)$$

es

$$x(t) = (t + 2\sqrt{x_0})^2 / 4$$

Claramente, para  $x_0 = 0$  hay dos soluciones: la solución trivial  $x(t) = 0$  y la dada por la fórmula anterior,  $x(t) = t^2/4$ .

**Ejercicio 1.2.3** Muéstrase que para  $x_0 = 0$  el problema de valor inicial (1.5) posee infinitas soluciones.

**Solución.** Consideremos, para  $a \in \mathbb{R}$ , la función:

$$y_a(t) = \frac{1}{4}(t - a)^2.$$

Debido a la observación 1.2.1, tenemos que  $y_a$  satisface la ecuación  $\dot{y}_a = \sqrt{y_a}$ . Obsérvese que  $y_a(a) = \dot{y}_a(a) = 0$ . Por tanto,

$$x_a(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a, \\ y_a(t) & \text{si } t > a, \end{cases}$$

define también una solución de (1.5).

En todos los ejemplos anteriores la función  $f$  que define la ecuación es continua. Como veremos a continuación, este es un requisito que garantiza la existencia de soluciones. De hecho, *prescindir de la continuidad puede llevar a que el problema de valor inicial no posea ninguna solución.*

**Ejercicio 1.2.4** Pruébese que no existen soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(x(t)), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \text{siendo} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

que estén definidas en un entorno de  $t = 0$ .

Comencemos introduciendo un poco de terminología. Una **solución estacionaria** o **de equilibrio** de la ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1.6)$$

es una solución que verifica  $x(t) = x_0$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ . Obsérvese que una condición necesaria y suficiente para que una solución sea estacionaria es que  $x(0) = x_0$  satisfaga:

$$f(x_0) = 0.$$

En tal caso, diremos que  $x_0$  es un **punto de equilibrio** o **punto crítico** de la ecuación. Claramente, dado  $x_0 \in U$  punto de equilibrio, siempre existe  $x(t)$  solución del problema de Cauchy asociado; dicha solución está definida en todo  $\mathbf{R}$ .

Dedicaremos lo que resta de sección a probar el siguiente resultado:

**Teorema 1.2.5** *Si  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$  es una función continua entonces el problema de valor inicial (1.4) tiene al menos una solución definida en un entorno  $I$  de  $t_0$ . Dicha solución viene dada por:*

i) si  $f(x_0) \neq 0$ ,

$$x(t) = F_{x_0}^{-1}(t - t_0), \quad F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{f(y)} dy; \quad (1.7)$$

ii) si  $f(x_0) = 0$ ,

$$x(t) = x_0.$$

En tres los ejemplos presentados anteriormente, este proceso no plantea problemas. Puede comprobarse que se tiene  $F_{x_0}(x) = \log(x/x_0)$ ,  $F_{x_0}(x) = 1/x_0 - 1/x$  y  $F_{x_0}(x) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})$  respectivamente. Las soluciones respectivas se obtienen despejando  $x(t)$  en la ecuación:

$$F(x(t)) = t - t_0.$$

Es importante recalcar la naturaleza **local** del Teorema 1.2.5. Únicamente garantiza la existencia de soluciones del problema de Cauchy definidas en un intervalo en torno al tiempo inicial  $t_0$ . El resultado no da ninguna información sobre el tamaño de dicho intervalo, que en algunos casos puede coincidir con toda la recta real, como vimos en los ejemplos anteriores. Esta es la cuestión de la **prolongabilidad de soluciones**, que abordaremos más adelante.

Investiguemos ahora la existencia de soluciones asociadas a un dato inicial  $x_0$  que no sea un punto de equilibrio, esto es  $f(x_0) \neq 0$ . Haremos en primer lugar un cálculo formal<sup>2</sup> que nos permita adivinar la estructura de las soluciones. Supondremos *a priori* que existe una solución para, utilizando la estructura de la ecuación diferencial, llegar a una fórmula que la defina.<sup>3</sup> Posteriormente, tendremos que probar rigurosamente que dicha fórmula define en efecto una solución.

<sup>2</sup>Para evitar confusiones, conviene matizar lo que entendemos por cálculo forma: se acostumbra a llamar **cálculo** o **argumento formal** a un argumento no completamente riguroso que permite adivinar u obtener intuición sobre la solución de un determinado problema.

<sup>3</sup>Este es el orden natural que tiene lugar en el proceso de creación/descubrimiento matemático. Mediante un argumento **heurístico** (intuitivo) se obtiene la solución a un problema matemático. Más adelante, se refina dicho proceso a través de la **demonstración** (rigurosa) que además sirve para clarificar y precisar el alcance del razonamiento heurístico. Una discusión más precisa (pero muy amena) se puede encontrar en el libro de IMRE LAKATOS, *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*, Madrid, Alianza, 1982, cuya lectura aconsejamos a cualquier persona interesada en las matemáticas.

**Cálculo formal.** Supongamos que  $x(t)$  es una solución de (1.4). Se tiene que

$$\frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} = 1.$$

Esto se puede describir como

$$\frac{d(F_{x_0} \circ x)}{dt}(t) = 1, \quad \text{donde } F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^x \frac{1}{f(y)} dy.$$

Así pues, integrando ambos lados entre  $t_0$  y  $t$  obtenemos:

$$F_{x_0}(x(t)) - F_{x_0}(x(t_0)) = t - t_0.$$

Como  $F_{x_0}(x(t_0)) = F_{x_0}(x_0) = 0$  – y esto explica nuestra elección de los límites de integración en la definición de  $F_{x_0}$  – se sigue que

$$F_{x_0}(x(t)) = t - t_0.$$

Finalmente, despejando  $x(t)$  llegamos a la fórmula:

$$x(t) = F_{x_0}^{-1}(t - t_0).$$

Hay dos cuestiones delicadas en esta derivación: la posible nulidad de  $f(x(t))$  – que podría llevar a que  $F_{x_0}$  no estuviera bien definida – y la inyectividad de  $F_{x_0}$ , que hemos utilizado implícitamente en el último paso del cálculo.

**Existencia de soluciones.** Veamos ahora las condiciones bajo las que (1.7) define una solución. Sea  $J \subset \mathbf{R}$  un intervalo que contiene  $x_0$  en su interior y sobre el que  $f$  no se anula. Dicho intervalo existe porque  $f$  es una función continua.

La función  $F_{x_0}$  está bien definida sobre  $J$ . Más aún, visto que

$$\frac{dF_{x_0}}{dx}(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0, \quad \text{si } x \in J,$$

se sigue que  $F_{x_0}$  es monótona (y en particular inyectiva) sobre  $J$ . Definamos  $I := F_{x_0}(J)$ ; en tal caso,  $F_{x_0} : J \rightarrow I$  es biyectiva y por tanto  $F_{x_0}^{-1} : I \rightarrow J$  está bien definida. Obsérvese que 0 pertenece al interior de  $I$  al ser  $F_{x_0}(x_0) = 0$ ; por tanto,  $x(t) = F_{x_0}^{-1}(t - t_0)$  es una solución de la ecuación diferencial más aún  $x(t_0) = F_{x_0}^{-1}(0) = x_0$ .

Derivando en (1.7) se comprueba que  $x(t)$  es de hecho una solución de la ecuación diferencial. ★

### 1.3. ¿Cuándo la solución es única?

Una vez establecida la existencia de soluciones del problema de valor inicial (1.4) pasaremos a abordar la cuestión de la **unicidad**. La pregunta a la que intentaremos dar respuesta en esta sección y la siguiente es la de entender cuándo el hecho de que dos soluciones  $x_i : I_i \rightarrow U$ ,  $i = 1, 2$ , de la ecuación diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1.8)$$

coincidan en un punto  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  implica que necesariamente  $x_1(t) = x_2(t)$  para todos los  $t \in I_1 \cap I_2$ .

Hemos visto que este no es el caso cuando  $f(x) = \sqrt{x}$ ; más en general veremos que la *unicidad de soluciones* está íntimamente ligada a la regularidad de la función  $f$ .

Desde el punto de vista de la modelización y de la utilización de las ecuaciones diferenciales en otras ciencias, la unicidad de soluciones es un aspecto importante. No podemos pretender predecir la evolución de un fenómeno natural describiéndolo a través un problema de valor inicial cuyas soluciones no son únicas: de entre todas las soluciones ¿cuál sería entonces la que describe el fenómeno?

La demostración del teorema de existencia da más información de la enunciada: garantiza, de hecho, que la solución del problema de valor inicial (1.4) es **localmente única** en el siguiente sentido. Si  $x(t)$  es una solución de la ecuación (1.8), que está definida sobre cierto intervalo  $[a, b]$  y tenemos  $f(x(t)) \neq 0$  sobre dicho intervalo, entonces podemos realizar el cálculo explicado anteriormente:

$$\frac{d}{dt} F_{x(a)}(x(t)) = 1$$

y concluir que, necesariamente  $x(t)$  coincide con  $F_{x(a)}^{-1}(t - a)$ , donde recordemos:

$$F_{x(a)}(x) = \int_{x(a)}^x \frac{1}{f(y)} dy.$$

En otras palabras:

**Proposición 1.3.1** *Sea  $x_1$  e  $x_2$  dos soluciones de (1.8), definidas respectivamente en intervalos  $I_1$ ,  $I_2$ , y que coinciden en un punto  $t_0 \in I_1 \cap I_2$ :*

$$x_1(t_0) = x_2(t_0).$$

*Si las derivadas de  $x_1$  y  $x_2$  no se anulan en  $I_1 \cap I_2$  (o lo que es lo mismo,  $f(x_i(t)) \neq 0$  para  $i = 1, 2$  y  $t \in I_1 \cap I_2$ ) entonces necesariamente las dos soluciones coinciden en su intervalo de definición común.*

En particular, obsérvese que esto basta para establecer la unicidad de soluciones para (1.4) en el caso en que el segundo miembro de la ecuación  $\dot{x} = f(x)$  no se anula.

Más aún, si somos capaces de determinar que para todo  $c$  que sea un punto de equilibrio de  $f$ , la solución estacionaria es la única que satisface  $x(t_0) = c$  podríamos asegurar que sea cual sea el dato inicial  $x_0$ , la solución del problema de valor inicial (1.4) es única. Si  $c$  es un punto de equilibrio **aislado**,<sup>4</sup> se presentan dos posibilidades.

**Proposición 1.3.2** *Si la integral*

$$\int_x^c \frac{1}{f(y)} dy \quad (1.9)$$

es finita<sup>5</sup> para  $x$  suficientemente cerca de  $c$  (de modo que  $f(y)$  no se anule entre  $c$  y  $x$ ) entonces existe una solución distinta a la estacionaria.

**Demostración.** La demostración reproduce lo que hicimos en el caso  $\dot{x} = \sqrt{x}$ . Como  $c$  es aislado, necesariamente existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x_0) \neq 0$  si  $|x_0 - c| < \delta$ . Así, la función dada por

$$x(t) := F_{x_0}^{-1}(t), \quad F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)},$$

está bien definida para  $t$  entre 0 y  $t_0 := F_{x_0}(c)$ , que es finito por hipótesis. Necesariamente,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} F_{x_0}^{-1}(t) = c, \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \dot{x}(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{F_{x_0}'(x(t))} = f(c) = 0, \end{aligned}$$

con lo que, si  $t_0 > 0$ ,

$$y(t) := \begin{cases} x(t + t_0) & \text{para } t \in (-t_0, 0), \\ c & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

es una función que satisface la ecuación diferencial y la condición inicial  $y(0) = x(t_0) = c$ . Un argumento análogo prueba el resultado si  $t_0 < 0$ . ★

De hecho, argumentando como en el ejercicio 1.2.3 puede probarse que existen infinitas soluciones que arrancan de  $c$ .

<sup>4</sup>Es decir, no hay otros puntos de equilibrio en  $(c - \delta, c + \delta)$  para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño.

<sup>5</sup>La integral indefinida (1.9) ha de entenderse en el siguiente modo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \varepsilon}^x \frac{ds}{f(s)}.$$

**Proposición 1.3.3** *Si, por el contrario, la integral (1.9) es infinita, entonces el problema de valor inicial (1.4) con  $x_0 = c$  posee una única solución,  $x(t) \equiv c$ .*

**Demostración.** Supongamos que exista una solución  $y : [-a, a] \rightarrow U$ , distinta a la estacionaria, que satisfaga  $y(0) = c$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $f(y(t)) \neq 0$  si  $t \neq 0$ . La Proposición 1.3.1 garantiza que, para  $t \in [-a, 0)$ ,

$$y(t) = F_{y(-a)}^{-1}(t + a).$$

Ahora bien,

$$a = \lim_{t \rightarrow 0^-} F_{y(-a)}(y(t)) = F_{y(-a)}(y(0)) = \int_{y(-a)}^c \frac{1}{f(s)} ds$$

con lo que (1.9) no puede ser infinita. ★

La condición sobre la integral (1.9) está relacionada con la regularidad de la función  $f$ , como muestra el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 1.3.4** *Sea  $f \in C^1(U)$ , siendo  $U \subset \mathbf{R}$  un intervalo abierto. Sea  $c \in U$  un cero de  $f$  y  $x > c$ , tal que  $f(y) \neq 0$  para  $y \in (c, x)$ . Pruébese entonces que*

$$\int_c^x \frac{1}{f(y)} dy = \pm\infty.$$

## 1.4. La desigualdad de Gronwall

En general, los puntos de equilibrio no son aislados. Por ejemplo, la función  $f(x) = x^3 \sin(1/x)$  es diferenciable; pero cualquier entorno de  $x = 0$  contiene un número infinito de ceros de  $f$ . Daremos a continuación un resultado de unicidad que contemple también este caso.

Una función  $f \in C(U)$  se dice **localmente Lipschitz** si dado  $[a, b] \subset U$  existe  $L_{[a,b]} > 0$  tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_{[a,b]} |x - y|, \quad \text{si } x, y \in [a, b].$$

Obsérvese que, por el Teorema del Valor Medio, las funciones  $f \in C^1(U)$  son automáticamente localmente Lipschitz.

Bajo esta condición podemos demostrar la unicidad de soluciones para el problema de valor inicial.

**Proposición 1.4.1 (Unicidad local)** *Si  $f$  es localmente Lipschitz entonces, para todo  $x_0 \in U$ , las soluciones del problema de valor inicial (1.4) son localmente*

únicas, en el sentido de que si  $x_i : I_i \rightarrow U$ ,  $i = 1, 2$ , son dos soluciones la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  que satisfacen

$$x_1(t_0) = x_2(t_0) \text{ para algún } t_0 \in I_1 \cap I_2,$$

entonces se tiene que

$$x_1(t) = x_2(t) \text{ para todo } t \in I_1 \cap I_2.$$

Para demostrar la Proposición 1.4.1, utilizaremos uno de los resultados fundamentales de este curso.

**Proposición 1.4.2 (Desigualdad de Gronwall, v1.0)** Sea  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}$  una función derivable que satisface:

$$|\dot{x}(t)| \leq a|x(t)|, \quad t \in [t_0, t_1],$$

para cierta constante  $a > 0$ . Entonces

$$|x(t)| \leq e^{(t-t_0)a} |x(t_0)|, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Este resultado es consecuencia de un sencillo lema, de interés por si mismo:

**Lema 1.4.3** Sea  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}$  derivable y que satisface:

$$\dot{u}(t) \leq au(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

entonces:

$$u(t) \leq e^{a(t-t_0)} u(t_0), \quad t \in [t_0, t_1].$$

**Demostración.** Consideremos

$$v(t) := u(t) e^{-at};$$

claramente  $v$  es derivable y

$$\dot{v}(t) = (\dot{u}(t) - au(t)) e^{-at} \leq 0.$$

Por tanto,

$$v(t) = u(t) e^{-at} \leq v(t_0) = u(t_0) e^{-at_0}$$

como queríamos demostrar. ★

**Demostración de la desigualdad de Gronwall.** Sea  $u(t) := |x(t)|^2$ . Entonces  $u$  satisface las condiciones del lema precedente, puesto que:

$$\dot{u}(t) = 2x(t) \dot{x}(t) \leq 2a|x(t)|^2 = 2au(t).$$



Así,

$$|x(t)|^2 \leq e^{2a(t-t_0)} |x(t_0)|^2,$$

y se concluye tomando raíces cuadradas. ★

Ahora la demostración de la Proposición 1.4.1 es trivial. Sean  $x_i : I_i \rightarrow U$ ,  $i = 1, 2$ , dos soluciones de (1.4). Sea  $z(t) := x_1(t) - x_2(t)$ ; claramente,

$$|\dot{z}| = |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Ahora bien, si tomamos intervalo compacto  $I \subset I_1 \cap I_2$  se tiene, por ser  $x_i$  continuas, que existe un intervalo compacto  $J$  para el cual  $x_i(t) \in J$  si  $t \in I$ . Sea  $L_J$  la constante de Lipschitz de  $f$  asociada a ese intervalo. Entonces, para  $t \in I$ ,

$$|\dot{z}(t)| \leq L_J |x_1(t) - x_2(t)| = L_J |z(t)|.$$

La desigualdad de Gronwall implica entonces que:

$$|z(t)| \leq e^{L_J(t-t_0)} |z(t_0)| = e^{L_J(t-t_0)} |x_1(t_0) - x_2(t_0)| = 0;$$

esto es,  $x_1(t) = x_2(t)$  para todo  $t \in I$ . Como  $I$  es un intervalo cerrado arbitrario contenido en  $I_1 \cap I_2$ , concluimos que  $x_1(t) = x_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ . ★

## 1.5. Prolongabilidad de soluciones.

Supondremos en esta sección que  $f$  es localmente Lipschitz en un intervalo  $U$ . Si  $x_1 : I_1 \rightarrow U$  y  $x_2 : I_2 \rightarrow U$  son dos soluciones de (1.4) entonces vimos en la Proposición 1.4.1 que necesariamente,  $x_1(t) = x_2(t)$  para  $t \in I_1 \cap I_2$ . En particular, la función:

$$x(t) := \begin{cases} x_1(t), & t \in I_1 \\ x_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

define correctamente una solución de (1.4) en el intervalo  $I_1 \cup I_2$ . Se dice entonces que  $x$  **prolonga** a  $x_1$  y  $x_2$ .

Dado  $x_0 \in U$ , denotamos por  $I_{x_0}$  a la unión de todos los intervalos  $I \subset \mathbf{R}$  con la propiedad de que existe una solución

$$x : I_{x_0} \rightarrow U$$

del problema de Cauchy (1.4). Utilizando el argumento anterior de prolongación, se obtiene que existe una solución de (1.4) que está definida en  $I_{x_0}$ . Además, no existe ninguna otra solución definida en un intervalo estrictamente mayor. Llamaremos a esta solución la **solución maximal** del problema de valor inicial (1.4).

**Proposición 1.5.1 (Unicidad global)** *Si  $f$  es localmente Lipschitz en  $U$  entonces existe una única solución maximal del problema de valor inicial (1.4).*

Vamos a determinar  $I_{x_0}$ . Hemos visto ya que las soluciones estacionarias de una ecuación diferencial están definidas en toda la recta real,  $I_{x_0} = \mathbf{R}$ . Si  $x_0$  no es un punto de equilibrio, denotamos por  $U_{x_0}$  al mayor intervalo que contiene  $x_0$  y sobre el cual  $f$  no se anula. Dicho intervalo es abierto y no vacío por ser  $f$  continua; además, sus extremos son o bien puntos de equilibrio de  $f$  (puntos donde  $f$  se anula), o bien  $\pm\infty$ .<sup>6</sup> El cálculo que utilizamos en la demostración del Teorema 1.2.5 para construir de forma explícita una solución del problema de valor inicial (1.4) es válido para todos los  $t \in F_{x_0}(U_{x_0})$ , por tanto la solución  $x(t)$  así obtenida está definida en dicho intervalo. Dejamos a cargo del lector concluir la demostración del siguiente resultado.

**Proposición 1.5.2 (Prolongabilidad)** *El intervalo  $I_{x_0}$  es abierto y viene dado por  $F_{x_0}(U_{x_0}) = I_{x_0}$ .*

Una solución con dato inicial  $x_0$  estará definida en todo  $\mathbf{R}$  si y sólo si  $I_{x_0} = \mathbf{R}$ . Escribiendo  $U_{x_0} = (a, b)$  y suponiendo  $f > 0$  en  $U_{x_0}$  esto es equivalente a<sup>7</sup>

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_{x_0}(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} F_{x_0}(x) = +\infty. \quad (1.10)$$

Este es el caso del primero de los ejemplos anteriores:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x/x_0) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log(x/x_0) = \infty.$$

En el segundo, tenemos, para  $x_0 > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x_0 - 1/x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x_0 - 1/x) = 1/x_0,$$

con lo cual  $I_{x_0} = (-\infty, 1/x_0)$ .

Si por el contrario  $f < 0$  en  $U_{x_0}$  entonces, para tener  $I_{x_0} = \mathbf{R}$  ha de cumplirse

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F_{x_0}(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} F_{x_0}(x) = -\infty.$$

**Ejercicio 1.5.3** *Sea  $x_0 \in U$  y supongamos que el extremo superior de  $I_{x_0}$  es finito, denotémoslo por  $t_*$ . Entonces, si  $x(t)$  denota la solución maximal de  $\dot{x} = f(x)$  con  $x(0) = x_0$  entonces necesariamente se tiene que  $\lim_{t \rightarrow t_*^-} x(t)$  existe y es uno de los extremos de  $U$  (finito o infinito). En particular, si  $U = \mathbf{R}$  entonces necesariamente,*

$$\lim_{t \rightarrow t_*^-} |x(t)| = \infty.$$

<sup>6</sup>En los ejemplos analizados anteriormente, un dato inicial  $x_0 > 0$  da lugar al intervalo  $U_{x_0} = (0, \infty)$ .

<sup>7</sup>Si  $f < 0$  basta sustituir  $x$  por  $-x$  en este argumento.

**Ejercicio 1.5.4** *Interprétese la condición (1.10) en términos del comportamiento de  $f$  en el infinito. En particular, demuéstrese que si  $f \in C^1(\mathbf{R})$  y existen constantes  $A$  y  $B$  para las que se tiene*

$$|f(x)| \leq A|x| + B$$

*para todo valor  $x$  entonces todas las soluciones de  $\dot{x} = f(x)$  están definidas en toda la recta real.*

**Ejercicio 1.5.5** *Sean  $a < b$  puntos de equilibrio de  $f$ . Supongamos además que no existen otros puntos de equilibrio en intervalo  $(a, b)$ . Entonces toda solución  $x(t)$  de (1.4) con dato inicial  $x_0 \in (a, b)$  verifica  $I_{x_0} = \mathbf{R}$ .*

## 1.6. Órbitas, diagrama de fases, estabilidad

Una vez aclarada la cuestión de la existencia y unicidad de soluciones para el problema (1.4) habiendo obtenido además una fórmula explícita se podría pensar que esto basta para comprender la estructura de las soluciones. Desgraciadamente, muchas veces la fórmula (1.7) es en la práctica inútil, bien porque no podamos calcular explícitamente la integral, bien porque no podamos invertir la función  $F$ .

Como ilustración de ello considérese el problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x-1}, \\ x(0) = x_0 \neq 1. \end{cases}$$

La función  $F$  viene dada por

$$F(x) = x - \log x - x_0 + \log x_0,$$

con lo que las soluciones vienen caracterizadas por la ecuación implícita:

$$x(t) - \log x(t) = t + x_0 - \log x_0,$$

que no puede resolverse explícitamente.

Debemos pues desarrollar herramientas alternativas que nos permitan comprender qué estructura tienen las soluciones. Un punto de vista que será de gran importancia en el estudio del caso multidimensional consiste en intentar determinar las imágenes de las trayectorias soluciones de la ecuación, sin pretender conocer con exactitud su parametrización. Obsérvese que, al tener todas las soluciones imagen en  $\mathbf{R}$  esta cuestión es especialmente sencilla. En el caso de un sistema de dos ecuaciones diferenciales esto ya no es así.

Dado  $x_0 \in U$  definimos la **órbita de  $x_0$**  como el conjunto de  $\mathbf{R}$ :

$$\mathcal{O}_{x_0} := \{x(t) : t \in I_{x_0}\},$$

siendo  $x(t)$  la solución maximal del problema de valor inicial (1.4).

**Ejercicio 1.6.1** La órbita  $\mathcal{O}_{x_0}$  de un punto o bien coincide con el propio punto,  $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$ , o bien es un intervalo abierto.

Una consecuencia importante de la Proposición 1.4.1 es que *dos órbitas distintas de una ecuación autónoma no pueden cortarse en un punto*.

**Proposición 1.6.2** Si  $\mathcal{O}_{x_0} \cap \mathcal{O}_{y_0} \neq \emptyset$  para dos puntos  $x_0, y_0 \in U$  entonces  $\mathcal{O}_{x_0} = \mathcal{O}_{y_0}$ .

**Demostración.** Basta observar que, si dos soluciones maximales  $x_1, x_2$  de la ecuación diferencial  $\dot{x} = f(x)$  con  $x_1(0) = x_0, x_2(0) = y_0$  verifican

$$x_1(t_1) = x_2(t_2)$$

en ciertos instantes  $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$  entonces  $y_1(t) := x_1(t - t_2 + t_1)$  verifica  $y_1(t_2) = x_1(t_1) = x_2(t_2)$ . Por ello, necesariamente,  $y_1 \equiv x_2$ . Y por otra parte,

$$\mathcal{O}_{x_0} := \{y(t) : t - t_2 + t_1 \in I_{x_0}\},$$

con lo que claramente  $\mathcal{O}_{x_0} = \mathcal{O}_{y_0}$ . ★

Llamaremos **diagrama de fases** de la ecuación  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  a la partición de  $U$  en órbitas.

Un primer e importantísimo paso en la determinación del diagrama de fases de una ecuación consiste en analizar el comportamiento de las soluciones de

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \in U, \end{cases} \quad (1.11)$$

en torno a un punto de equilibrio  $c$ .

Diremos que un punto de equilibrio  $c \in U$  es **estable** si dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo punto  $x_0 \in U$  on  $|x_0 - c| < \delta$  se tiene que la solución maximal  $x(t)$  del problema de valor inicial (1.4) está definida para todo  $t \in [0, \infty)$  y

$$|x(t) - c| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, \infty).$$

Un punto de equilibrio  $c \in U$  es **asintóticamente estable** si es estable y además existe  $r > 0$  tal que si  $|x_0 - c| < r$  entonces la solución maximal  $x(t)$  del problema de valor inicial (1.4) verifica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - c| = 0.$$

**Proposición 1.6.3** Sea  $c \in U$  un punto de equilibrio de  $f$ . Si  $f'(c) < 0$  entonces  $c$  es asintóticamente estable. Si  $f'(c) > 0$  entonces  $c$  no es estable.

**Demostración.** Demostremos la primera afirmación. Si  $f'(c) < 0$  entonces  $f$  es decreciente en un entorno de  $c$ . En particular, existe  $r > 0$  tal que  $f$  es estrictamente decreciente en  $(c - r, c + r)$ . Sea  $x_0$  tal que  $|x_0 - c| < r$ ; supondremos que  $x_0 > c$  (el caso  $x_0 < c$  se trata de forma análoga). La solución maximal  $x(t)$  correspondiente a  $x_0$  satisface:

$$\dot{x}(t) < 0,$$

con lo que, para  $t \in I_{x_0}$  tenemos que  $x(t)$  es estrictamente decreciente. Esto implica que, dado  $\varepsilon > 0$  si  $x_0 - c < \varepsilon$  entonces también se tiene  $x(t) - c < \varepsilon$ . Esto implicaría la estabilidad si  $\sup I_{x_0} = \infty$ .

El extremo superior de  $I_{x_0}$  tiene que ser infinito, puesto que si fuera  $t_*$  finito tendríamos que  $\lim_{t \rightarrow t_*^-} x(t) = -\infty$ , lo cual implicaría que  $x(t)$  corta a  $c$ . Esto es imposible por la unicidad de la solución estacionaria.

Tampoco puede ser  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_* > c$ ; en ese caso la órbita  $\mathcal{O}_{x_*}$  de  $x_*$  no puede coincidir con  $\{x_*\}$ , puesto que  $x_*$  no es un punto de equilibrio; pero tampoco puede ser un intervalo abierto porque cortaría a la órbita de  $x_0$ . Hemos probado que necesariamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - c| = 0.$$

La segunda afirmación – la no estabilidad de  $c$  si  $f'(c) > 0$  – se comprueba de forma sencilla, la dejaremos a cargo del lector. ★

**Ejercicio 1.6.4** *El punto  $x_0 = 0$  es un equilibrio de las siguientes ecuaciones:*

$$(i) \dot{x} = -2x^5, \quad (ii) \dot{x} = x^3, \quad (iii) \dot{x} = x^2.$$

*Pruébese que en el caso (i) es estable y para (ii) y (iii) es no estable.*

La naturaleza de los argumentos que acabamos de presentar es puramente local: son válidos en un entorno del punto de equilibrio en cuestión. En el caso de una ecuación autónoma unidimensional es fácil extenderlos globalmente y obtener una caracterización cualitativa completa de las soluciones.

**Ejercicio 1.6.5** *Dibujar los diagramas de fases correspondientes al siguiente modelo de dinámica de poblaciones:*

$$\dot{x} = x(1 - x) - k.$$

## 1.7. La ecuación lineal no autónoma

Una vez entendido con detalle el comportamiento de las soluciones de la ecuación autónoma pasamos al estudio de una situación más complicada: la ecuación no

autónoma unidimensional:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in U, \quad t_0 \in I \end{cases} \quad (1.12)$$

siendo  $f : I \times U \rightarrow \mathbf{R}$  continua y  $I, U$  intervalos de  $\mathbf{R}$ . Recuérdese que dicha ecuación es equivalente al sistema bidimensional:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 1, \\ \dot{x}(t) = f(s(t), x(t)), \\ s(t_0) = t_0 \in I, \quad x(t_0) = x_0 \in U. \end{cases}$$

El estudio de la ecuación (1.12) es mucho más complejo que el de la ecuación autónoma (pero mucho menos complicado que el de un sistema bidimensional general). La obtención de fórmulas explícitas ya no es posible en general. Una importante excepción la constituye la siguiente familia de ecuaciones:

**Ejercicio 1.7.1** *Mediante un argumento análogo al del cálculo de la solución de la ecuación autónoma, encuéntrese una fórmula para las soluciones de la ecuación de variables separables:*

$$\dot{x}(t) = g(t) f(x(t)).$$

**Ejercicio 1.7.2** *Resuélvase las ecuaciones diferenciales:*

- (i)  $\dot{x} = \operatorname{sen}(t) x.$
- (ii)  $\dot{x} = g(t) \tan x.$

Es importante conocer la solución explícita de las ecuaciones lineales. La **ecuación lineal homogénea** es:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t) x(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}, \quad t_0 \in I \end{cases} \quad (1.13)$$

siendo  $a$  una función continua definida en un intervalo  $I$ . Una solución se obtiene escribiendo:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a(t) \implies \frac{d}{dt} \log x(t) = a(t) \implies \log \left( \frac{x(t)}{x_0} \right) = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

Así,

$$x(t) = x_0 \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) ds \right). \quad (1.14)$$

Pese a haber procedido mediante un cálculo formal, se comprueba de inmediato que esta expresión define una solución.

Basándonos en la fórmula (1.14) podemos resolver la **ecuación lineal no homogénea**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}, \quad t_0 \in I \end{cases} \quad (1.15)$$

donde ahora  $a, b \in C(I)$ . Dicha ecuación no es de variables separables. No obstante, es posible deducir una fórmula explícita para ella utilizando el **método de variación de las constantes**. Escribamos

$$\phi(t) := \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right).$$

La solución de la ecuación homogénea (1.13) se escribe entonces como  $\phi(t)x_0$ . El método consiste en buscar una solución de (1.15) de la forma  $x(t) = \phi(t)u(t)$ . Introduciendo dicha expresión en la ecuación:

$$\dot{\phi}(t)u(t) + \phi(t)\dot{u}(t) = a(t)\phi(t)u(t) + b(t),$$

ahora bien,  $\dot{\phi}(t)u(t) = a(t)\phi(t)u(t)$  con lo que queda la siguiente expresión para  $u$ :

$$\dot{u}(t) = \phi(t)^{-1}b(t),$$

y la condición inicial implica  $x_0 = \phi(t_0)u(t_0) = u(t_0)$ . Así pues, necesariamente:

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^s a(\sigma) d\sigma\right) b(s) ds.$$

Hemos obtenido la siguiente expresión para  $x(t)$ :

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t)\phi(s)^{-1}b(s) ds. \quad (1.16)$$

Obsérvese que el primer sumando es la solución de la ecuación homogénea (1.13) mientras que el segundo es una solución de (1.15) con dato inicial  $x_0 = 0$ .

**Proposición 1.7.3** *La función (1.14) (resp. (1.16)) es la única solución del problema de valor inicial (1.13) (resp. (1.16)).*

**Demostración** Supongamos que  $x_1$  y  $x_2$  son dos soluciones de (1.13) o (1.15) definidas en un mismo intervalo  $I \subset \mathbf{R}$ . Su diferencia  $z := x_1 - x_2$  satisface en ambos casos:

$$\dot{z}(t) = a(t)z(t), \quad z(t_0) = 0;$$

si definimos

$$v(t) := z(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

se tiene que

$$\dot{v}(t) = (\dot{z}(t) - a(t)z(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right) = 0.$$

Así

$$v(t) = v(t_0) = z(t_0) = 0. \quad (1.17)$$

Por tanto, visto que  $\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$  nunca se anula, necesariamente

$$0 = z(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

★

**Ejercicio 1.7.4** Sean  $u$ ,  $a$  y  $b$  funciones continuas definidas en un intervalo  $[t_0, t_1]$  tales que  $u$  es derivable y

$$|\dot{x}(t)| \leq a(t)|x(t)| + b(t), \quad \text{para } t \in [t_0, t_1].$$

Pruébese entonces que

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\sigma) d\sigma\right) b(s) ds.$$

Al igual que en el caso autónomo, la única solución constante de la ecuación homogénea es la idénticamente cero  $x(t) \equiv 0$ . No obstante, vemos que la dinámica de las restantes trayectorias puede ser muy variada y no admite una clasificación sencilla en términos del coeficiente  $a(t)$ .

## 1.8. Ecuaciones lineales con coeficientes periódicos

Finalizamos este capítulo estudiando con cierto detalle una clase de coeficientes para los que sí puede hacerse un análisis bastante detallado: los **coeficientes periódicos**. Supongamos ahora que  $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua y periódica, con periodo  $T > 0$ :

$$a(t + T) = a(t), \quad \text{para } t \in \mathbf{R}.$$

Estudiaremos el comportamiento para tiempos grandes de las soluciones de:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t). \quad (1.18)$$

Para calcular el valor de una solución en un tiempo  $t$  basta conocer sus valores en el intervalo  $[0, T)$ :



**Lema 1.8.1** Sea  $t \in \mathbf{R}$ ; escribáse  $t = kT + \tau$  con  $k \in \mathbf{Z}$  y  $\tau \in [0, T)$ . Toda solución de (1.18) satisface:

$$x(t) = e^{k\langle a \rangle} x(\tau), \quad \langle a \rangle := \int_0^T a(s) ds.$$

Dejamos la demostración como ejercicio para el lector. La fórmula anterior indica que el comportamiento de las soluciones de la ecuación con coeficientes periódicos es completamente análogo al de la ecuación con coeficiente constante. La dinámica viene determinada esta vez por el signo de  $\langle a \rangle$ :

1.  $\langle a \rangle < 0$ . Entonces

$$|x(kT + \tau)| \leq e^{k\langle a \rangle} \max_{s \in [0, T)} |x(s)|.$$

Por tanto, toda solución de (1.18) tiende a la solución estacionaria:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

2.  $\langle a \rangle > 0$ . Ahora,

$$|x(kT + \tau)| \geq e^{k\langle a \rangle} \min_{s \in [0, T)} |x(s)|.$$

Como consecuencia de ello, si  $x(0) \neq 0$  tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty.$$

3.  $\langle a \rangle = 0$ . Entonces todas las soluciones son periódicas de periodo  $T$ .

Así, a diferencia del caso autónomo, las soluciones pueden desarrollar dinámicas que no son ni de atracción ni de repulsión hacia la solución de equilibrio  $x(t) \equiv 0$ .



# Capítulo 2

## Existencia de soluciones

### 2.1. Algunas observaciones generales

En este segundo capítulo discutiremos la teoría básica de existencia para **sistemas** de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_d(t) = f_d(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t)), \end{cases}$$

o, en una escritura más compacta,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_d(t))$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_d(\mathbf{x}))$ .<sup>1</sup>

Conviene tener presente que el estudio de dichos sistemas engloba, como caso particular, el de las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $n$ :

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)). \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es equivalente al sistema de  $n + 1$  ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Utilizaremos en lo que sigue **negrita** para denotar cantidades vectoriales.

Dada  $x(t)$  una solución de (2.2), definiendo

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= x(t), \\ x_2(t) &:= \dot{x}(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &:= x^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

se obtiene una solución de (2.3). Y recíprocamente, si  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  verifican (2.3) entonces  $x(t) := x_1(t)$  es una solución de (2.2). El mismo procedimiento permite reducir sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $n$  a sistemas de primer orden.

Un sistema de ecuaciones diferenciales se dice **autónomo** si es de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.4)$$

para cierta función  $\mathbf{f} : U \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ . Debemos destacar que todo sistema de primer orden (2.1) es equivalente al sistema autónomo de  $d + 1$  ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 1, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(s(t), \mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

en el siguiente sentido. Si  $(s(t), \mathbf{x}(t))$  es una solución de (2.5) que satisface  $s(0) = 0^2$  entonces necesariamente  $\mathbf{x}(t)$  es solución de (2.1). Recíprocamente, dada  $\mathbf{x}(t)$  una solución del sistema (2.1), el par  $s(t) := t, \mathbf{x}(t)$  es solución de (2.5).

Estas simplificaciones permiten evitar enunciar separadamente resultados para sistemas no autónomos o de orden superior al primero. Bastará por tanto, tratar la cuestión de la existencia y unicidad de soluciones únicamente en el caso de sistemas autónomos.<sup>3</sup>

Concluimos esta sección introductoria describiendo algunas de las notaciones que utilizaremos a continuación. Denotaremos por  $C(U; \mathbf{R}^d)$  y  $C^1(U; \mathbf{R}^d)$  al espacio de las funciones  $\mathbf{f} : U \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$  que son continuas y con derivadas parciales continuas, respectivamente. Dada  $\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbf{R}^d)$  y  $\mathbf{c} \in U$  denotamos por  $D\mathbf{f}_{\mathbf{c}}$  a la

<sup>2</sup>Lo cual implica, integrando la primera ecuación, que  $s(t) = t$ .

<sup>3</sup>No obstante, al tratar aspectos finos de la estructura de las soluciones en ejemplos específicos, puede ser útil mantener la forma original del sistema – no autónomo o de orden superior al primero.

diferencial de  $\mathbf{f}$  en el punto  $\mathbf{c}$ , es decir, si  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_d)$  entonces

$$D\mathbf{f}_{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(\mathbf{c}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_d}(\mathbf{c}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(\mathbf{c}) & \frac{\partial f_d}{\partial x_2}(\mathbf{c}) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_d}(\mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

Para un punto  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$  utilizaremos la notación  $\|\mathbf{x}\|$  para denotar su módulo; esto es:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_d)^2}.$$

Obsérvese que si  $d = 1$  entonces  $\|\cdot\|$  es precisamente el valor absoluto.

## 2.2. El problema de Cauchy: existencia

Así pues, nos centraremos en lo que sigue en el estudio del problema de Cauchy asociado al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in U, \end{cases}} \quad (\text{PVI})$$

donde supondremos  $U \subset \mathbf{R}^d$  abierto y  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbf{R}^d$  continua.

Diremos en lo sucesivo que una curva parametrizada

$$\mathbf{x} : I \rightarrow U$$

definida en un intervalo  $I \subset \mathbf{R}$  que contiene al instante inicial  $t_0$  es una **solución** del problema de Cauchy (PVI) si  $\mathbf{x}$  es continuamente diferenciable en  $I$ , verifica la condición inicial y la ecuación diferencial en todos los  $t \in I$ .

La condición (PVI) implica que la curva definida por  $\mathbf{x}(t)$  es tangente al vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  para todos los  $t \in I$ . Por ello, nos referiremos a  $\mathbf{f}$  como a un **campo de vectores**. Otra interpretación de (PVI) viene dada por la mecánica: si  $\mathbf{x}(t)$  representa la posición de una partícula en el instante de tiempo  $t$  entonces la ecuación diferencial expresa que el vector velocidad  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  es precisamente  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . Se trata pues de reconstruir la trayectoria de la partícula a partir del conocimiento de los vectores velocidad admisibles.

Es posible probar un resultado de existencia en las mismas condiciones que en el caso unidimensional:

**Teorema 2.2.1 (Cauchy-Peano)** Sea  $U \subset \mathbf{R}^d$  abierto y  $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbf{R}^d$  continua. Dados  $\mathbf{x}_0 \in U$  y

$$0 < r < \text{dist}(\mathbf{x}_0, \partial U),$$

existe al menos una solución

$$\mathbf{x} : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \overline{B(\mathbf{x}_0; r)},$$

del problema de valor inicial (**PVI**), siendo

$$a := \frac{r}{M}, \quad M := \max_{\mathbf{x} \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|.$$

Queremos incidir en la naturaleza **local** de este resultado; únicamente asegura la existencia de una solución para instantes  $t$  próximos al instante inicial  $t_0$ . La longitud del intervalo donde el teorema garantiza que la solución está definida depende de la distancia del dato inicial a la frontera del dominio de definición de  $\mathbf{f}$  así como del tamaño del propio campo de vectores.

En general el dominio de definición de la solución que se obtiene mediante el teorema de Cauchy-Peano no es óptimo. *Pueden existir soluciones definidas en un intervalo mayor que el  $[t_0 - a, t_0 + a]$ .* Para convencerse de ello, basta examinar la ecuación unidimensional

$$\dot{x}(t) = x(t).$$

Si consideramos el dato inicial  $x(0) = 0$ , dado  $r > 0$ , se tiene  $M = \max_{\|x\| \leq r} \|x\| = r$ , con lo que  $a = 1$ . Claramente, la solución correspondiente  $x(t) \equiv 0$  está definida para todo  $t \in \mathbf{R}$ . La cuestión de decidir cual es el mayor intervalo en el que una solución del problema de valor inicial (**PVI**) está definida se abordará en las secciones sucesivas.

La demostración que daremos del Teorema de Cauchy-Peano estará basada en el **método de Euler**. En general, la resolución explícita del problema de valor inicial no es posible y uno ha de recurrir a métodos aproximados, bien de tipo **numérico**, bien **asintóticos**.

Probablemente, el más simple y popular dentro de la primera categoría es el conocido como **método de Euler**. Consiste en aproximar la ecuación diferencial mediante una ecuación en diferencias, en la que se reemplaza la derivada por un cociente incremental:

$$\frac{\mathbf{x}_h(j+1) - \mathbf{x}_h(j)}{h} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_h(j)).$$

Hay que pensar en  $\mathbf{x}_h(j)$  como una aproximación de los valores de una solución exacta  $\mathbf{x}(t)$  en los nodos  $t_j := hj$ , donde  $j \in \mathbf{Z}$  y  $h > 0$  se denomina **paso de discretización**. La demostración del teorema consistirá en probar que, tomando una

sucesión de pasos de discretización  $h_k$  que tiende a cero, podemos obtener interpolando linealmente los valores  $\mathbf{x}_h(j)$  entre los nodos  $t_j$  una sucesión de funciones  $\mathbf{x}_k$  que converge a una solución exacta del problema de valor inicial (**PVI**).

Probaremos en primer lugar que, en caso de converger las funciones  $\mathbf{x}_k$ , éstas lo hacen necesariamente a una solución de la ecuación diferencial. En un segundo momento, veremos que es posible extraer una subsucesión de las  $\mathbf{x}_k$  que converge uniformemente. Esto se hará a través de un resultado conocido como el teorema de Ascoli-Arzelà.

### 2.2.1. Convergencia del método de Euler

Comencemos observando que es suficiente demostrar el resultado para  $t_0 = 0$ . Basta considerar la solución  $\mathbf{y}(t)$  que satisface  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0$  y definir  $\mathbf{x}(t) := \mathbf{y}(t + t_0)$  para obtener una solución de (**PVI**) con  $t_0 \neq 0$ .

La demostración consistirá en construir, mediante el método de Euler, una sucesión de funciones

$$\mathbf{x}_k : [0, a] \rightarrow U, \quad k \in \mathbf{N},$$

que satisfacen (**PVI**) de forma aproximada. Una vez hecho esto, probaremos que dicha sucesión converge a una función que necesariamente es una solución exacta de (**PVI**). El argumento que damos se adapta de forma inmediata a la construcción de  $\mathbf{x}_k$  en  $[-a, 0]$ .

Es importante observar que una curva  $\mathbf{x}$  es solución de (**PVI**) si y sólo si satisface la ecuación integral:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds. \quad (2.6)$$

- *Construcción de las funciones  $\mathbf{x}_k(t)$ .*

Comenzamos dividiendo el intervalo  $[0, a]$  en  $k$  partes iguales. Escribimos

$$h := \frac{a}{k}, \quad t_j := jh, \quad \text{para } j = 0, \dots, k,$$

y definimos  $\mathbf{x}_k(t)$  en los puntos  $t = t_j$  de forma recursiva, utilizando el **método de Euler**:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{x}_k(t_{j+1}) - \mathbf{x}_k(t_j)}{h} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_j)), \\ \mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{x}_k(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

La elección que hemos hecho de  $a$  garantiza que los valores  $\mathbf{x}_k(t_j)$  están bien definidos; más aún, se tiene  $\mathbf{x}_k(t_j) \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$  para  $j = 0, \dots, k$ . La comprobación de este hecho se hace de forma inductiva. Claramente,

$$\|\mathbf{x}_k(t_1) - \mathbf{x}_0\| = h \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_0))\| \leq hM = r/k \leq r.$$

Si se sabe que  $\mathbf{x}_k(t_1), \mathbf{x}_k(t_2), \dots, \mathbf{x}_k(t_j) \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$  entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_k(t_{j+1}) - \mathbf{x}_0\| &\leq \|\mathbf{x}_k(t_{j+1}) - \mathbf{x}_k(t_j)\| + \|\mathbf{x}_k(t_j) - \mathbf{x}_k(t_{j-1})\| + \dots + \|\mathbf{x}_k(t_1) - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq h (\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_j))\| + \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_{j-1}))\| + \dots + \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|) \\ &\leq h(j+1)M \\ &\leq r. \end{aligned}$$

En el interior del intervalo  $[t_j, t_{j+1}]$  definimos la función  $\mathbf{x}_k(t)$  como el segmento que une los puntos  $\mathbf{x}_k(t_{j+1})$  y  $\mathbf{x}_k(t_j)$ , es decir:

$$\mathbf{x}_k(t) := \mathbf{x}_k(t_j) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_j))(t - t_j) \quad \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Obsérvese que seguimos teniendo  $\mathbf{x}_k(t) \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$  por la convexidad de la bola.

• *Las funciones  $\mathbf{x}_k$  satisfacen*

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s)) ds + R_k(t), \quad (2.7)$$

donde el resto  $R_k$  converge uniformemente a cero en  $[0, a]$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Sea  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ ; entonces tenemos, sumando y restando  $\mathbf{x}_k(t_n)$  para  $n = 1, \dots, j$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_j))(t - t_j) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_{j-1}))h + \dots + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_0))h \\ &= \int_{t_j}^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_j)) ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_{j-1})) ds + \dots + \int_0^{t_1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_0)) ds \\ &= \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s)) ds + R_k(t), \end{aligned}$$

donde, para  $t \in [t_j, t_{j+1}]$ , el resto viene dado por:

$$\begin{aligned} R_k(t) &:= \int_{t_j}^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_j)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s))] ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_{j-1})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s))] ds + \dots \\ &\dots + \int_0^{t_1} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_0)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s))] ds. \end{aligned}$$



Hemos comprobar que las funciones  $R_k$  convergen uniformemente a cero en  $[0, a]$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Comencemos observando que la función  $\mathbf{f}$  es uniformemente continua en el compacto  $\overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$ . Así pues, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon, \quad \text{si } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \text{ para } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B(\mathbf{x}_0, r)}.$$

Como para  $s \in [t_n, t_{n+1}]$ ,

$$\|\mathbf{x}_k(t_n) - \mathbf{x}_k(s)\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_n))(s - t_n)\| \leq Mh = r/k,$$

podemos elegir  $k_0$  tal que para  $k \geq k_0$  se tiene  $r/k < \delta$  y, en consecuencia, si  $s \in [t_n, t_{n+1}]$  para  $n = 0, \dots, j$ :

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k(t_n)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s))\| < \varepsilon.$$

Por ello,

$$\begin{aligned} \|R_k(t)\| &\leq \int_{t_j}^t \varepsilon ds + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varepsilon ds + \dots + \int_0^{t_1} \varepsilon ds \\ &\leq (j+1)h\varepsilon \\ &\leq a\varepsilon. \end{aligned}$$

En particular, hemos probado que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0 > 0$  tal que para  $k \geq k_0$ ,

$$\max_{t \in [0, a]} \|R_k(t)\| \leq a\varepsilon,$$

lo que implica la convergencia uniforme.

• Si  $\mathbf{x}_k$  converge uniformemente a una función  $\mathbf{x}$  en  $[0, a]$  entonces necesariamente  $\mathbf{x}$  satisface (2.6).

Tomando límites en (2.7) se tiene para  $t \in [0, a]$ :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s)) ds.$$

Como  $\mathbf{f}$  es uniformemente continua en  $\overline{B(\mathbf{x}_0, r)}$  y  $\mathbf{x}_k$  converge uniformemente, se concluye que  $\mathbf{x}$  es continua y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s)) ds = \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k(s)) ds = \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s)) ds.$$

Sólo falta pues probar que las aproximaciones  $\mathbf{x}_k$  convergen uniformemente a una función  $\mathbf{x}$ .

Esto es lo que asegura el Teorema de Ascoli-Arzelà.

**Teorema 2.2.2 (Ascoli-Arzelà)** Sea  $f_k : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^d$  una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto acotado  $\Omega$  y tales que:

(i) están uniformemente acotadas:

$$\|f_k(x)\| \leq C, \quad \text{para todos } x \in \Omega \text{ y } k \in \mathbf{N},$$

(ii) son equilipschitz en  $\Omega$ :

$$\|f_k(x) - f_k(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \text{para todos } x, y \in \Omega \text{ y } k \in \mathbf{N}.$$

Entonces existe una subsucesión  $(f_{k(i)})_{i \in \mathbf{N}}$  y una función  $f \in C(\Omega; \mathbf{R}^d)$  tales que  $f_{k(i)}$  converge uniformemente a  $f$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

En nuestro caso, tenemos que

$$\max_{t \in [0, a]} \|\mathbf{x}_k(t)\| \leq r + \|\mathbf{x}_0\|$$

y, por otra parte, se comprueba fácilmente que

$$\|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_k(s)\| \leq M \|t - s\|$$

para  $t, s \in [0, a]$ . Así  $(\mathbf{x}_k)$  es una sucesión de funciones uniformemente acotada y equilipschitz. Aplicando el razonamiento anterior a la subsucesión  $(\mathbf{x}_{k(i)})$  que da el Teorema de Ascoli-Arzelà, concluimos la prueba del teorema. ★

## 2.2.2. Demostración del Teorema de Ascoli-Arzelà

Conviene considerar en primer lugar un caso más sencillo que será la base del argumento.

**Lema 2.2.3 (Cantor)** Sea  $(g_k)_{k \in \mathbf{N}}$  una sucesión de funciones de  $\mathbf{N}$  en  $\mathbf{R}^d$ . Supongamos que la sucesión está uniformemente acotada:

$$\|g_k(n)\| \leq C, \quad \text{para todos } k \text{ y } n.$$

Entonces existe una subsucesión  $(g_{k(i)})_{i \in \mathbf{N}}$  tal que  $g_{k(i)}(n)$  converge para todo  $n \in \mathbf{N}$ .

**Demostración.** Visto que la sucesión  $(g_k(1))_{k \in \mathbf{N}}$  está acotada, podemos extraer de ella una subsucesión que converge. Denotémosla por  $(g_{k_1(i)})_{i \in \mathbf{N}}$ ; repetimos ahora el paso anterior para la sucesión acotada  $(g_{k_1(i)}(2))_{i \in \mathbf{N}}$ . De este modo extraemos de  $(g_{k_1(i)})$  una subsucesión  $(g_{k_2(i)})_{i \in \mathbf{N}}$  para la que  $g_{k_2(i)}(2)$  converge. Obsérvese que también se tiene que  $g_{k_2(i)}(1)$  es convergente. En general, podemos construir inductivamente una familia de subsucesiones  $(g_{k_j(i)})_{i \in \mathbf{N}}$  con las siguientes propiedades:

1.  $(g_{k_j(i)})_{i \in \mathbf{N}}$  es una subsucesión de  $(g_{k_{j-1}(i)})_{i \in \mathbf{N}}$ .
2.  $(g_{k_j(i)}(n))_{i \in \mathbf{N}}$  es convergente para  $n = 1, 2, \dots, j$ .

La idea clave para conseguir una subsucesión  $(g_{k(i)})$  para la que  $(g_{k(i)}(n))$  sea convergente para *todo*  $n \in \mathbf{N}$  es utilizar el célebre argumento diagonal de Cantor. Definimos:

$$g_{k(i)} := g_{k_i(i)}.$$

Claramente, dado  $n \in \mathbf{N}$  tenemos que  $(g_{k(i)})_{i \geq n}$  es una subsucesión de  $(g_{k_j(i)})_{i \geq j}$  por lo que  $g_{k(i)}(n)$  es convergente. ★

Volvamos ahora al caso general. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  un conjunto numerable y denso en  $\Omega$ . El lema anterior garantiza que existe una subsucesión  $f_{k(i)}$  con la propiedad de que  $(f_{k(i)}(x_n))_{i \in \mathbf{N}}$  converge sea cual sea  $n$ . Veamos ahora que de hecho se tiene convergencia para cualquier  $x \in \Omega$ . Para ello, veremos que  $(f_{k(i)}(x))_{i \in \mathbf{N}}$  es una sucesión de Cauchy. Tomemos  $\varepsilon > 0$  y elijamos  $x_n$  de modo que  $\|x - x_n\| < \varepsilon$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|f_{k(i)}(x) - f_{k(j)}(x)\| &\leq \|f_{k(i)}(x) - f_{k(i)}(x_n)\| + \\ &\quad + \|f_{k(i)}(x_n) - f_{k(j)}(x_n)\| + \\ &\quad + \|f_{k(j)}(x_n) - f_{k(j)}(x)\|. \end{aligned}$$

Utilizando la segunda hipótesis deducimos:

$$\|f_{k(i)}(x) - f_{k(j)}(x)\| \leq 2L\varepsilon + \|f_{k(i)}(x_n) - f_{k(j)}(x_n)\|.$$

Como  $(f_{k(i)}(x_n))_{i \in \mathbf{N}}$  es convergente, existe  $k_0 > 0$  tal que si  $i, j > k_0$  se tiene:

$$\|f_{k(i)}(x_n) - f_{k(j)}(x_n)\| < \varepsilon,$$

lo cual implica que, para dichos  $i$  y  $j$  se tiene:

$$\|f_{k(i)}(x) - f_{k(j)}(x)\| \leq (2L + 1)\varepsilon.$$

Falta por comprobar que la convergencia al límite  $f$  es uniforme. Veremos que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k_0 > 0$  tal que si  $i, j > k_0$  se tiene para todo  $x \in \Omega$ .

$$\|f_{k(i)}(x) - f_{k(j)}(x)\| < \varepsilon$$

Sea  $\varepsilon > 0$  y  $y_1, \dots, y_n \in \Omega$  tales que todo punto de  $\Omega$  diste de algún  $y_m$  menos que  $\varepsilon$ .<sup>4</sup> Para  $x \in \Omega$  y  $|x - y_m| < \varepsilon$  se tiene,

$$\begin{aligned} \|f_{k(i)}(x) - f_{k(j)}(x)\| &\leq \|f_{k(i)}(x) - f_{k(i)}(y_j)\| + \\ &\quad + \|f_{k(i)}(y_m) - f_{k(j)}(y_m)\| \\ &\quad + \|f_{k(j)}(y_j) - f_{k(j)}(x)\|. \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Esto es posible al ser  $\Omega$  acotado.

Nuevamente, como  $(f_{k(i)}(y_m))$  son convergentes y sólo hay un número finito de  $y_m$ , podemos encontrar  $k_0$  tal que si  $i, j > k_0$  se tiene para todo  $y_m$ ,

$$\|f_{k(i)}(y_m) - f_{k(j)}(y_m)\| < \varepsilon.$$

Con esto obtenemos, sea cual sea  $x$ ,

$$\|f_{k(i)}(x) - f_{k(j)}(x)\| \leq (2L + 1)\varepsilon.$$

★

Es conveniente observar que la demostración del Teorema de Ascoli-Arzelà puede llevarse a cabo si la condición *ii)* es reemplazada por esta más débil:

*ii)'* Las funciones  $f_k$  son **equicontinuas** en  $\Omega$ : dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, si  $x, y \in \Omega$  verifican  $|x - y| < \delta$  entonces para todo  $k > 0$  se tiene

$$\|f_k(x) - f_k(y)\| < \varepsilon.$$

Es inmediato comprobar que *ii)* implica *ii)'*.

## 2.3. Iteraciones de Picard

La estrategia que hemos utilizado para demostrar la existencia de una solución del problema de valor inicial en el teorema de Cauchy-Peano puede resumirse en dos pasos:

1. Hemos construido una sucesión de soluciones aproximadas del problema de valor inicial – para ello, nos hemos servido del método de Euler.
2. Hemos probado que (al menos una subsucesión de) las aproximaciones converge a una función que es solución exacta de nuestro problema – y a tal efecto hemos utilizado un resultado de compacidad: el teorema de Ascoli-Arzelà.

A continuación, describiremos otro modo de llevar a cabo esta estrategia que puede aplicarse a numerosos problemas. Consiste en reescribir nuestra ecuación como una ecuación de punto fijo. Recuérdese que un **punto fijo** de una aplicación  $T : X \rightarrow X$  de un conjunto  $X$  en si mismo es un punto  $x \in X$  con la propiedad:

$$T(x) = x.$$

Hemos visto que una curva  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  es solución del problema de valor inicial si y sólo si satisface:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds;$$

en otras palabras,  $\mathbf{x}$  es un punto fijo de la aplicación  $T_{\mathbf{x}_0}$  que a una curva  $\mathbf{v}$  le asocia la curva:

$$T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})(t) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) ds.$$

Por tanto, encontrar una solución del problema de valor inicial equivale a encontrar un punto fijo de  $T_{\mathbf{x}_0}$ .

Recordemos el resultado más sencillo que garantiza la existencia de un punto fijo de una aplicación: el teorema de la aplicación de contractiva de PICARD.

**Teorema 2.3.1** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico **completo**. Si  $T : X \rightarrow X$  es una aplicación **contractiva**, esto es, que satisface:*

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \quad \text{para todos } x, y \in X,$$

entonces  $T$  posee un único punto fijo  $x_\infty \in X$ .

Además,  $x_\infty$  puede ser calculado como el límite:

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

de cualquier sucesión  $(x_n)$  en  $X$  construida mediante el **método de las aproximaciones sucesivas**:

$$\begin{cases} x_0 \in X & \text{arbitrario,} \\ x_n = T(x_{n-1}), & \text{para } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Nuestro objetivo será aplicar este resultado a la aplicación  $T_{\mathbf{x}_0}$ . Para ello, hemos de encontrar un espacio métrico completo  $(X, d)$  con las propiedades:

1.  $T_{\mathbf{x}_0}$  envía  $X$  en si mismo
2.  $T_{\mathbf{x}_0}$  es contractiva.

Es natural elegir como  $X$  el espacio siguiente:

$$X := C\left([t_0 - a, t_0 + a]; \overline{B(\mathbf{x}_0; r)}\right),$$

con  $a$  y  $r$  por determinar, equipado de la distancia natural:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sup_{|t-t_0| \leq a} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\|, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X;$$

con esta elección de la distancia  $(X, d)$  es un espacio métrico completo. El siguiente resultado muestra cómo elegir los parámetros  $a$  y  $r$  de modo que se satisfagan las hipótesis del teorema de Picard.

**Lema 2.3.2** *Supongamos que  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$ ; sean  $t_0 \in I$  y  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Entonces es posible elegir constantes  $a, r > 0$  tales que:*

$T_{\mathbf{x}_0}$  manda  $X = C\left([t_0 - a, t_0 + a]; \overline{B(\mathbf{u}_0; r)}\right)$  en si mismo y es contractiva.

**Demostración.** Comencemos fijando  $r > 0$  de modo que  $\overline{B(\mathbf{x}_0; r)} \subset U$ ; escribamos, para  $a > 0$  que fijaremos más adelante,

$$M_a := \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \overline{B(\mathbf{u}_0; r)} \\ |t - t_0| \leq a}} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|.$$

Entonces tenemos, sea cual sea  $\mathbf{u} \in X$  y para  $|t - t_0| \leq a$ ,

$$\begin{aligned} \|T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u})(t) - \mathbf{x}_0\| &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s))\| ds \\ &\leq |t - t_0| M_a \\ &\leq a M_a. \end{aligned}$$

La aplicación  $T_{\mathbf{x}_0}$  mandará  $X$  en si mismo siempre que elijamos  $a > 0$  de modo que  $a M_a \leq r$ .

Veamos ahora cuándo  $T_{\mathbf{x}_0}$  es contractiva. Dadas  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$ ,

$$\begin{aligned} d(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})) &= \sup_{|t - t_0| \leq a} \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))] ds \right\| \\ &\leq L \sup_{|t - t_0| \leq a} \int_{t_0}^t \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{v}(s)\| ds \\ &\leq L |t - t_0| d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\leq L a d(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

donde  $L$  es la constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}$  en  $\overline{B(\mathbf{x}_0; r)}$ . Si elegimos  $a$  de modo que  $aL < 1$  y  $aM_a \leq r$  obtenemos el resultado deseado. ★

**Ejercicio 2.3.3** *Demuéstrese a partir del lema un resultado de existencia y unicidad para el problema de valor inicial.*

Es importante observar que, mediante este proceso, hemos un método para construir funciones que aproximen con toda la precisión que se quiera la solución exacta del problema de valor inicial. Siempre que  $T_{\mathbf{x}_0}$  sea una aplicación contractiva

de  $X = C([t_0 - a, t_0 + a]; \overline{B(\mathbf{u}_0; r)})$  en si mismo, el teorema de Picard garantiza que las funciones definidas por:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 \in X & \text{arbitrario,} \\ \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_{n-1}(s)) ds, & \text{para } n \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (2.8)$$

convergen uniformemente en  $[t - a, t + a]$  hacia una solución exacta del problema de valor inicial. Este método de **aproximaciones sucesivas** no es muy utilizado en la práctica debido a su alto coste computacional. Pero es interesante desde el punto de vista teórico; de hecho lo utilizaremos más adelante.

Obsérvese que para que las aproximaciones (2.8) puedan ser construidas no se necesita que  $\mathbf{f}$  sea Lipschitz – basta que sea integrable. Cabe entonces preguntarse bajo qué condiciones sobre  $\mathbf{f}$  se cumple que  $(\mathbf{u}_n)$  converge hacia una solución exacta del problema de Cauchy (aunque, en principio, no haya unicidad de soluciones).

El siguiente ejemplo muestra que no podemos suponer que  $\mathbf{f}$  es meramente continua.

**Ejercicio 2.3.4** Sea  $f$  una función continua de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}$  tal que

$$f(t, x) := \begin{cases} -2t, & x \geq t^2, \\ 2t, & x \leq 0. \end{cases}$$

Aunque no sea relevante, para los puntos  $(t, x) = \lambda(t, t^2) + (1 - \lambda)(t, 0)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , (los puntos en el segmento que une  $(t, t^2)$  y  $(t, 0)$ ) la podemos definir mediante

$$f(t, x) := \lambda(-2t) + (1 - \lambda)(2t).$$

Sea  $(u_n)$  la sucesión de aproximaciones sucesivas para  $f$  y  $t_0, x_0 = 0$  construidas a partir de  $u_0 = 0$ . Demuéstrese que  $(u_n)$  no posee ninguna subsucesión que converge hacia una solución del problema de valor inicial.

**Solución.** Tenemos que

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int_0^t f(s, 0) ds = \int_0^t 2s ds = t^2, \\ u_2(t) &= \int_0^t f(s, s^2) ds = \int_0^t -2s ds = -t^2, \\ u_3(t) &= \int_0^t f(s, -s^2) ds = \int_0^t 2s ds = t^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$u_n(t) = \begin{cases} t^2, & n \text{ impar,} \\ -t^2, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Claramente, cualquier subsucesión convergente de  $(u_n)$  necesariamente lo hace hacia  $\pm t^2$ . Pero ninguna de estas funciones son soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}(\pm t^2) = \pm 2t \neq \mp 2t = f(t, \pm t^2).$$



# Capítulo 3

## Sistemas Lineales

### 3.1. Ecuaciones lineales

En esta sección recapitularemos algunos resultados esenciales concernientes a la ecuación lineal:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada de dimensión  $d$  con entradas reales.

El método de las aproximaciones sucesivas aplicado a  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$  muestra, al ser  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbf{R}^d)$ , que el problema de Cauchy (3.1) posee una única solución. Deduciremos a continuación una fórmula explícita para las soluciones de dicha ecuación.

#### 3.1.1. Cálculo a través del método de Euler

Tomamos  $t \in \mathbf{R}$  y dividimos el intervalo  $[0, t]$  en  $N$  partes iguales. Poniendo  $h := t/N$ , definimos los vértices  $\mathbf{x}_N(hn)$ ,  $n = 0, \dots, N$ , de una curva poligonal  $\mathbf{x}_N(s)$ ,  $s \in [0, t]$ , mediante:

$$\frac{\mathbf{x}_N(h(n+1)) - \mathbf{x}_N(hn)}{h} = A\mathbf{x}_N(hn). \quad (3.2)$$

Como vimos en la demostración del Teorema de Cauchy-Peano, si  $t$  es suficientemente pequeño, las funciones  $\mathbf{x}_N$  convergen a una solución de (3.1) uniformemente en el intervalo  $[0, t]$ . En particular,  $\mathbf{x}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{x}_N(t)$ .

Ahora bien, (3.2) se puede escribir también como:

$$\mathbf{x}_N(h(n+1)) = (\text{Id} + hA)\mathbf{x}_N(hn),$$

con lo cual,

$$\mathbf{x}_N(hn) = (\text{Id} + hA)^n \mathbf{x}_N(0).$$

Así pues, denotando por  $\mathbf{x}(t)$  la solución exacta de (3.1), tenemos

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{x}_N(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{x}_N(hN) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\text{Id} + hA)^N \mathbf{x}_0.$$

La expresión

$$(\text{Id} + hA)^N = \left( \text{Id} + \frac{t}{N}A \right)^N$$

es bien conocida en dimensión uno. De hecho, para  $a \in \mathbf{R}$  la solución exacta de  $\dot{x} = ax$  es precisamente  $e^{at}$ . Por tanto, la convergencia de  $x_N(t)$  a  $e^{at}$  da otra demostración del conocido hecho:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{t}{N}a \right)^N = e^{at}.$$

Algo similar ocurre en el caso general.<sup>1</sup> Para verlo calcularemos la solución utilizando el método de las aproximaciones sucesivas.

### 3.1.2. Cálculo a través del método de las aproximaciones sucesivas

Definimos funciones  $\mathbf{x}_k(t)$  utilizando la fórmula recursiva del método de las aproximaciones sucesivas:

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t A\mathbf{x}_{k-1}(s) ds, \quad k = 1, 2, \dots$$

con  $\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0$ . Hemos visto que, puesto que  $A$  es Lipschitz, se tiene que

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t).$$

Es fácil calcular por inducción:

$$\mathbf{x}_k(t) = \sum_{j=1}^k \frac{t^j}{j!} A^j \mathbf{x}_0.$$

Así, puesto que la solución al problema de valor inicial es única, tenemos:

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \text{Id} + \frac{t}{N}A \right)^N \mathbf{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{t^j}{j!} A^j \mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \mathbf{x}_0. \quad (3.3)$$

Daremos ahora un breve repaso al análisis en el espacio de las matrices.

<sup>1</sup>Estas son las dos formas más naturales de definir la función exponencial  $e^t$ . Históricamente, la definición a través del límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{t}{n} \right)^n$  es anterior. Fue descubierta por Jacob Bernoulli en 1683 en el contexto de sus investigaciones sobre el interés compuesto. El límite aparece como un modo de describir el interés compuesto continuo, que en lenguaje actual se caracteriza por la ecuación diferencial  $\dot{x} = x$ .

### 3.1.3. Normas y convergencia en el espacio de matrices

Las matrices cuadradas  $d \times d$  con entradas reales forman un espacio vectorial real  $\mathcal{M}_d$  de dimensión  $d^2$ . La cantidad:

$$\|A\| := \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

es finita y define una norma<sup>2</sup> sobre  $\mathcal{M}_d$ . Más aún, se verifican las relaciones:

$$\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|, \quad (3.4)$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (3.5)$$

En particular, si una sucesión de matrices  $(B_N)$  verifica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|B_N - A\| = 0,$$

entonces, como consecuencia de (3.4), se tiene para todo  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B_N \mathbf{x}_0 = A \mathbf{x}_0.$$

El recíproco también es cierto.

**Proposición 3.1.1** *Sea  $(B_n)$  una sucesión en  $\mathcal{M}_d$ . Son equivalentes: i) Existe  $B \in \mathcal{M}_d$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n - B\| = 0$  (convergen respecto a la norma  $\|\cdot\|$ ). ii) Existe  $B \in \mathcal{M}_d$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \mathbf{x} = B \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$  (convergen puntualmente).*

**Demostración.** Sólo es necesario probar que ii) implica i). Sea  $\mathbf{S}^{d-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d : \|\mathbf{x}\| = 1\}$  la esfera unidad. Puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n \mathbf{x} = B \mathbf{x}$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ , se sigue que la convergencia es uniforme sobre conjuntos compactos; en particular sobre  $\mathbf{S}^{d-1}$ . Esto no es otra cosa que afirmar que

$$\|B_n - B\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{d-1}} \|(B_n - B) \mathbf{x}\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

★

---

<sup>2</sup>Una norma sobre un espacio vectorial  $E$  es, recuérdese, una aplicación  $u \in E \mapsto [0, \infty) \ni \|u\|$  que tiene las siguiente propiedades:

$$\begin{aligned} \|u\| &= 0 \quad \text{si y sólo si } u = 0, \\ \|u + v\| &\leq \|u\| + \|v\|, \\ \|\lambda u\| &= |\lambda| \|u\|, \quad \text{para } \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

### 3.1.4. La exponencial de una matriz

La fórmula explícita que hemos obtenido para las soluciones del problema de valor inicial (3.1) nos conduce a hacerla siguiente definición. La matriz:

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n,$$

se denomina **exponencial** de la matriz  $A$ . Obsérvese que la serie converge absolutamente: para todos  $N > M > 0$  se tiene:

$$\left\| \sum_{n=M}^N \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=M}^N \frac{1}{n!} \|A\|^n,$$

y esta última cantidad converge a  $e^{\|A\|}$  cuando  $M = 0$  y  $N \rightarrow \infty$ .

De hecho, utilizando la Proposición 3.1.1 y la identidad (4.2) se deduce que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \text{Id} + \frac{t}{N} A \right)^N = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \mathbf{x}_0 = e^{tA}$$

para la convergencia en norma.

## 3.2. Cálculo de $e^{tA}$

Generalmente, la fórmula (1.7) no es el método más práctico para calcular efectivamente las soluciones de una ecuación lineal. A continuación, presentamos algunos métodos más adecuados.

1. Si  $A$  es **diagonal**, esto es,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}$$

entonces el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  se escribe:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_d = \lambda_d x_d. \end{cases}$$

Es claro que la solución explícita es:

$$x_1(t) = e^{t\lambda_1}x_1(0), \quad x_2(t) = e^{t\lambda_2}x_2(0), \quad \dots, \quad x_d(t) = e^{t\lambda_d}x_d(0);$$

o, en términos del flujo:

$$\phi_t(\mathbf{x}) = e^{tA}\mathbf{x} = (e^{t\lambda_1}x_1, e^{t\lambda_2}x_2, \dots, e^{t\lambda_d}x_d).$$

Así,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_d} \end{pmatrix}.$$

2. Si  $A$  es **diagonalizable**, es decir, si existe una base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_d\}$  de  $\mathbf{R}^d$  formada por autovectores de  $A$ :

$$A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1, \quad A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2, \quad \dots, \quad A\mathbf{u}_d = \lambda_d\mathbf{u}_d$$

entonces podemos reducirnos al caso anterior. Comencemos tomando como dato inicial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}$  un autovector de  $A$ . Entonces si  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  se tiene que

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\lambda}\mathbf{u}$$

es la solución del problema de valor inicial (3.1), puesto que

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \lambda e^{t\lambda}\mathbf{u} = e^{t\lambda}A\mathbf{u} = A\mathbf{x}(t).$$

Dado ahora  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$  lo escribimos como combinación lineal de autovectores:

$$\mathbf{x}_0 = \mu_1\mathbf{u}_1 + \dots + \mu_d\mathbf{u}_d.$$

Entonces

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\lambda_1}\mu_1\mathbf{u}_1 + \dots + e^{t\lambda_d}\mu_d\mathbf{u}_d$$

es la solución correspondiente del problema de valor inicial (3.1.)

3.  $A$  **no es diagonalizable porque hay autovalores complejos**. Supongamos que el polinomio característico de  $A$  tiene una raíz compleja  $\lambda \in \mathbf{C}$  con  $\text{Im}\lambda \neq 0$  – necesariamente entonces  $\bar{\lambda}$  también es raíz. Visto que  $A$  puede interpretarse como una aplicación lineal de  $\mathbf{C}^d$  en  $\mathbf{C}^d$  existen  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^d$  tales que

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= \lambda(\mathbf{u} + i\mathbf{v}), \\ A(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) &= \bar{\lambda}(\mathbf{u} - i\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Estas relaciones implican, escribiendo  $\alpha := \operatorname{Re}\lambda$  y  $\beta := \operatorname{Im}\lambda$ , que

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}, \\ A\mathbf{v} &= \beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Supongamos  $d = 2$ . En tal caso  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$  son las únicas raíces del polinomio característico de  $A$ . Los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son linealmente independientes, puesto que  $\mathbf{v} \neq 0$  (de lo contrario  $\operatorname{Im}\lambda = 0$ ) y, si fuera  $\mathbf{u} = \mu\mathbf{v}$  entonces necesariamente,  $\mu\beta + \alpha$  sería un autovalor de  $A$ . La expresión

$$e^{t\lambda}(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$$

es solución de la ecuación diferencial. Tomando partes reales y complejas, deducimos:

$$e^{t\alpha}(\cos t\beta\mathbf{u} - \operatorname{sen}t\beta\mathbf{v}), \quad e^{t\alpha}(\cos t\beta\mathbf{v} + \operatorname{sen}t\beta\mathbf{u}) \quad (3.6)$$

son también soluciones. Son linealmente independientes, puesto que el determinante de la matriz

$$e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \operatorname{sen} \beta t \\ -\operatorname{sen} \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$$

es  $e^{\alpha t}$ . Así toda solución de (3.1) es combinación lineal de (3.6). Más precisamente, si

$$\mathbf{x}_0 = \mu_1\mathbf{u} + \mu_2\mathbf{v}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\alpha t}(\mu_1 \cos t\beta + \mu_2 \operatorname{sen} t\beta)\mathbf{u} + e^{\alpha t}(-\mu_1 \operatorname{sen} t\beta + \mu_2 \cos t\beta)\mathbf{v} \\ &= e^{\alpha t} \cos t\beta(\mu_1\mathbf{u} + \mu_2\mathbf{v}) + e^{\alpha t} \operatorname{sen} t\beta(\mu_2\mathbf{u} - \mu_1\mathbf{v}). \end{aligned}$$

4. **Si  $A$  no es diagonalizable; pero los autovalores son reales** la situación es un poco distinta. Restrinjámonos nuevamente al caso  $d = 2$ . Supongamos que  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  con multiplicidad 2; pero que el subespacio propio asociado a  $A$  tiene dimensión uno (en particular, no existe una base de  $\mathbf{R}^2$  formada por autovalores de  $A$ ); sea  $\mathbf{u}$  un autovalor. Entonces es posible encontrar  $\mathbf{v} \neq 0$ , linealmente independiente con  $\mathbf{u}$ , tal que:

$$(A - \lambda \operatorname{Id})\mathbf{v} = \mathbf{u}.$$

Si ahora  $B$  es la matriz de columnas  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  tenemos

$$e^{tA} = B e^{tJ} B^{-1}$$

siendo

$$J = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Un sencillo cálculo muestra que:

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}.$$

En general, conviene retener que una solución de la ecuación lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

se escribe como combinación lineal de términos de la forma

$$e^{t\operatorname{Re}\lambda} p_\lambda(t)$$

donde  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  y  $p_\lambda(t)$  es bien un polinomio, si  $\lambda$  es real, bien una función de la forma:

$$\cos \alpha t \pm \operatorname{sen} \beta t,$$

siendo  $\alpha = \operatorname{Re}\lambda$  y  $\beta = \operatorname{Im}\lambda$ .

Una forma sencilla de comprobarlo es utilizar el siguiente resultado de álgebra lineal: *toda matriz  $A$  se puede escribir como*

$$A = D + N$$

donde  $D$  es una matriz diagonalizable y  $N$  es una matriz nilpotente (esto es, tal que  $N^k = 0$  para algún  $k \geq 0$ ). Además,  $DN = ND$ .

En tal caso tenemos

$$e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$$

donde  $e^{tA}$  se calcula como antes y

$$e^{tN} = \operatorname{Id} + tN + \dots + \frac{t^k N^k}{k!}.$$





# Capítulo 4

## Dependencia continua y prolongabilidad

### 4.1. La desigualdad de Gronwall: un nuevo enfoque a la unicidad

Una vez resuelta la cuestión de la existencia de soluciones, intentaremos averiguar bajo qué condiciones – y en qué sentido – la solución proporcionada por el Teorema de Cauchy Peano es única. Recordemos que, en general, bajo la mera hipótesis de continuidad sobre  $\mathbf{f}$  la solución del problema de valor inicial no es única. Vimos que un ejemplo de ello lo proporciona la ecuación unidimensional:

$$\dot{x} = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0.$$

No obstante, probamos en el capítulo 2, utilizando el método de las aproximaciones sucesivas, que la solución sí es única si se impone que  $\mathbf{f}$  sea localmente Lipschitz. Este es siempre el caso si  $\mathbf{f}$  es continuamente diferenciable.

**Ejercicio 4.1.1** Si  $\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbf{R}^d)$  entonces  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz.

**Solución:** comprobemos que  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz. Sea  $\bar{B} \subset U$  una bola cerrada. Entonces, dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{B}$  se tiene, para cada componente  $j = 1, \dots, d$ ,

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y}) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f_j(\mathbf{y} + s(\mathbf{x} - \mathbf{y})) ds \\ &= \int_0^1 \nabla_{\mathbf{x}} f_j(\mathbf{y} + s(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) ds. \end{aligned}$$

La expresión anterior está bien definida por ser  $\bar{B}$  convexo. Así,

$$\|f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y})\| \leq \max_{\mathbf{z} \in \bar{B}} \|\nabla_{\mathbf{x}} f_j(\mathbf{z})\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

★

Damos a continuación una demostración alternativa de la unicidad de soluciones utilizando la desigualdad de Gronwall.

**Proposición 4.1.2** *Supongamos que  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz. Si  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  son dos soluciones de la ecuación*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)),$$

*definidas, respectivamente, en los intervalos  $I_1, I_2 \subset \mathbf{R}$ , y que satisfacen*

$$\mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{x}_2(t_0), \quad \text{para algún } t_0 \in I_1 \cap I_2,$$

*entonces necesariamente,*

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t), \quad \text{para todo } t \in I_1 \cap I_2.$$

En otras palabras, dos soluciones de una ecuación autónoma que coinciden en un instante de tiempo, necesariamente lo hacen en su intervalo de definición común. Este es un resultado de **unicidad** de soluciones del problema de valor inicial: si  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  satisfacen (**PVI**) entonces necesariamente coinciden en cualquier intervalo en que estén ambas definidas.

La demostración se basará en la versión multidimensional de la desigualdad de Gronwall:

**Lema 4.1.3 (Desigualdad de Gronwall v2.0)** *Sea  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbf{R}^d$  continuamente diferenciable y que satisfice:*

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| \leq B(t) |\mathbf{x}(t)|, \tag{4.1}$$

*siendo  $B : I \rightarrow \mathbf{R}$  continua y no negativa.*

*Entonces se tiene, para  $t, t_0 \in I$ , con  $t > t_0$ :*

$$|\mathbf{x}(t)| \leq |\mathbf{x}(t_0)| \exp\left(\int_{t_0}^t B(s) ds\right).$$

**Demostración:** Apliquemos la desigualdad de Cauchy-Swartz y la hipótesis (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|^2 &= 2\mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &\leq 2\|\mathbf{x}(t)\| \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \\ &\leq 2B(t) \|\mathbf{x}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Podemos ahora utilizar el Lema 1.4.3 del capítulo primero y obtener:

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|^2 \exp 2 \left( \int_{t_0}^t B(s) ds \right);$$

se concluye la demostración tomando raíces cuadradas. ★

**Demostración de la Proposición 4.1.2.** Basta reproducir la de la Proposición 1.4.1. ★

Un razonamiento completamente análogo se puede aplicar al caso de una función  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  dependiente del tiempo bajo una hipótesis más débil que la que proporciona la Proposición 4.1.2.<sup>1</sup>

**Ejercicio 4.1.4** *Pruébese que la conclusión de la Proposición 4.1.2 sigue siendo válida si  $\mathbf{f} : I \times U \rightarrow \mathbf{R}^d$  es continua y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  siempre que las constantes  $L$  estén localmente uniformemente acotadas en  $t$ .*

*Por ejemplo, si  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \varphi(t)g(\mathbf{x})$  entonces la hipótesis anterior se satisface si  $\varphi$  es continua y  $g$  Lipschitz.*

## 4.2. La desigualdad de Gronwall: dependencia continua del dato inicial

Utilizaremos la desigualdad de Gronwall para demostrar una estimación de continuidad respecto del dato inicial.

**Proposición 4.2.1** *Sea  $\mathbf{f} : U \subset \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$  localmente Lipschitz. Sea  $K \subset U$  compacto y  $L$  la constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}$  en  $K$ . Dadas dos soluciones  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : [t_0, t_1] \rightarrow K$  de la ecuación diferencial:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

se tiene

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| \leq \|\mathbf{x}_1(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0)\| e^{(t-t_0)L},$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

**Demostración.** Sea  $\mathbf{z} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ . Se tiene para  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\| &\leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t))\| \\ &\leq L \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| \\ &= L \|\mathbf{z}(t)\|. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (Lema 4.1.3) concluimos la demostración.

★

---

<sup>1</sup>Bien entendido, cuando el problema de valor inicial asociado a  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  se formula como un sistema autónomo añadiendo una variable adicional.

### 4.3. La desigualdad de Gronwall: dependencia continua del campo de vectores

Para demostrar nuestra última versión de la desigualdad de Gronwall necesitaremos dos resultados preliminares interesantes por sí mismos.

**Lema 4.3.1** Sean  $A \geq 0$  y  $u, B : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  funciones continuas y no negativas que satisfacen para todo  $t \in [a, b]$  la desigualdad

$$u(t) \leq A + \int_a^t B(s) u(s) ds.$$

Entonces:

$$u(t) \leq A \exp\left(\int_a^t B(s) ds\right).$$

**Solución:** Como  $B(t)$  es no negativa podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( A + \int_a^t B(s) u(s) ds \right) &= B(t) u(t) \\ &\leq B(t) \left( A + \int_a^t B(s) u(s) ds \right). \end{aligned}$$

Supongamos que  $A > 0$  (si  $A = 0$  el resultado se prueba sumando en primera instancia  $\varepsilon > 0$  a la parte derecha de la desigualdad y pasando al límite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ). Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log \left( A + \int_a^t B(s) u(s) ds \right) &\leq B(t), \\ \log \left( A + \int_a^t B(s) u(s) ds \right) &\leq \log(A) + \int_a^t B(s) ds, \\ u(t) \leq A + \int_a^t B(s) u(s) ds &\leq A \exp \left( \int_a^t B(s) ds \right), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ★

**Lema 4.3.2** Sea  $\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^d$  diferenciable. Entonces, para todo  $t \in [t_0, t_1]$  se tiene:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{x}}(s)\| ds.$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| - \|\mathbf{x}(t_0)\| &\leq \left| \|\mathbf{x}(t)\| - \|\mathbf{x}(t_0)\| \right| \\ &\leq \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{x}}(s) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{x}}(s)\| ds. \end{aligned}$$

★

El Lema 4.1.3 admite la siguiente útil generalización.

**Teorema 4.3.3 (Desigualdad de Gronwall v3.0)** *Sea  $g(t, s)$  una función definida en  $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}$ , localmente Lipschitz en  $s$  y  $\rho(t)$  la única solución, que supondremos definida en  $[t_0, t_1]$ , de*

$$\begin{cases} \dot{\rho}(t) = g(t, \rho(t)) \\ \rho(t_0) = \rho_0. \end{cases}$$

Si  $\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^d$  satisfice

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \leq g(t, \|\mathbf{x}(t)\|), \quad \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \rho_0,$$

entonces se tiene, para  $t \in [t_0, t_1]$ ,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \rho(t).$$

Es fácil comprobar el Lema 4.1.3 es un caso particular de este Teorema. Basta considerar  $g(t, s) := B(t)$ .

**Demostración.** Definamos

$$t_* := \sup \{t \in [t_0, t_1] : \|\mathbf{x}(\tau)\| \leq \rho(\tau) \text{ para } \tau \in [t_0, t]\}.$$

Suponiendo que  $t_* < t_1$  llegaremos a una contradicción. Comencemos observando que, debido a la continuidad de  $\|\mathbf{x}\|$  y  $\rho$  y al hecho que  $t_*$  es maximal, necesariamente

$$\|\mathbf{x}(t_*)\| = \rho(t_*), \tag{4.2}$$

y que existe  $\varepsilon > 0$  tal que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| > \rho(t), \quad \text{para } t \in (t_*, t_* + \varepsilon]. \tag{4.3}$$

El Lema 4.3.2 implica:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t_*)\| + \int_{t_*}^t \|\dot{\mathbf{x}}(s)\| ds \leq \|\mathbf{x}(t_*)\| + \int_{t_*}^t g(s, \|\mathbf{x}(s)\|) ds;$$

mientras que, por hipótesis,

$$\rho(t) = \rho(t_*) + \int_{t_*}^t g(s, \rho(s)) ds.$$

con lo que, para  $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$  tenemos, teniendo en cuenta (4.2) y denotando por  $L$  a la constante de Lipschitz de  $g$  en un compacto adecuado,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\| - \rho(t) &\leq \int_{t_*}^t [g(s, \|\mathbf{x}(s)\|) - g(s, \rho(s))] ds \\ &\leq L \int_{t_*}^t (\|\mathbf{x}(s)\| - \rho(s)) ds \\ &= L \int_{t_*}^t (\|\mathbf{x}(s)\| - \rho(s)) ds. \end{aligned}$$

Podemos ahora, utilizando (4.3), aplicar el Lema 4.3.1 y concluir que:

$$\|\mathbf{x}(t_* + \varepsilon)\| - \rho(t_* + \varepsilon) \leq 0,$$

lo cual es una contradicción. ★

Utilizaremos esta versión de la desigualdad de Gronwall para demostrar un resultado de continuidad respecto del segundo miembro de la ecuación.

**Proposición 4.3.4** Sean  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  funciones continuas de  $U \subset \mathbf{R}^d$  en  $\mathbf{R}^d$  con  $\mathbf{f}_1$  localmente Lipschitz. Sean  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : [t_0, t_1] \rightarrow K$  donde  $K \subset U$  es compacto, soluciones de:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1), \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2).$$

Sea  $L$  la constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}_1$  en  $K$ . Si para cierto  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$\|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2(t))\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1],$$

entonces

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| \leq \|\mathbf{x}_1(t_0) - \mathbf{x}_2(t_0)\| e^{(t-t_0)L} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{(t-t_0)L} - 1).$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

**Demostración.** Sea  $\mathbf{z} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ ; procediente como hicimos anteriormente obtenemos:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\| &= \|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2(t))\| \\ &\leq \|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_2(t))\| + \|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2(t))\| \\ &\leq L \|\mathbf{z}(t)\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Apliquemos ahora el Teorema 4.3.3 con  $g(t, s) := Ls + \varepsilon$  y  $\rho$  dada por:

$$\dot{\rho}(t) = L\rho(t) + \varepsilon, \quad \rho(t_0) = \|\mathbf{z}(t_0)\|.$$

Tenemos entonces:

$$\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| = \|\mathbf{z}(t)\| \leq \rho(t).$$

Para concluir sólo basta darse cuenta de que:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= e^{(t-t_0)L} \|\mathbf{z}(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{(t-s)L} \varepsilon ds \\ &= \|\mathbf{z}(t_0)\| e^{(t-t_0)L} - \frac{\varepsilon}{L} (1 - e^{(t-t_0)L}). \end{aligned}$$

★

## 4.4. Soluciones maximales

Abordaremos en esta sección la cuestión de la **prolongabilidad** de las soluciones de una ecuación diferencial. Ante todo, recordemos que el Teorema de Cauchy-Peano garantiza la existencia de una solución del problema de valor inicial (**PVI**) definida en un intervalo de la forma  $[t_0 - a, t_0 + a]$ , siempre que  $a$  verifique

$$a = \frac{r}{\max_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0; r)} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|},$$

para  $0 < r < \text{dist}(\mathbf{x}_0, \partial U)$ .

Suponemos en lo que sigue que  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz. Estamos, por tanto, en el contexto en que se puede aplicar la Proposición 4.1.2 y garantizar que las soluciones son localmente únicas. Como vimos considerando  $f(x) = x$  y  $x_0 = 0$ , puede suceder que exista una solución  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  de (**PVI**) definida en un intervalo  $I$  mayor que  $[t_0 - a, t_0 + a]$ ; ahora bien, la Proposición 4.1.2 garantiza entonces que dicha solución ha de coincidir necesariamente con la solución  $\mathbf{x}(t)$  dada por el teorema de Cauchy-Peano en el intervalo  $[t_0 - a, t_0 + a]$ . En otras palabras, necesariamente,  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  *prolonga* a  $\mathbf{x}(t)$ . Cabe pues preguntarse cual es el mayor intervalo sobre el cual se puede prolongar la solución  $\mathbf{x}(t)$ . Ya vimos en el capítulo anterior que las soluciones no constantes de la ecuación  $\dot{x} = x^2$  no se pueden prolongar a toda la recta real. Examinaremos en detalle la situación análoga en el caso multidimensional.

Sin pérdida de generalidad, podemos restringirnos a considerar el tiempo inicial  $t_0 = 0$ .

Sea  $I_{\mathbf{x}_0}$  la unión de todos los intervalos  $I \subset \mathbf{R}$  que contienen a  $t = 0$  y para los cuales existe una solución  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  del problema de valor inicial (**PVI**).

**Lema 4.4.1**  $I_{\mathbf{x}_0}$  es un intervalo abierto y existe una única solución de (PVI) definida sobre  $I_{\mathbf{x}_0}$ . Más aún, es el mayor intervalo de  $\mathbf{R}$  en el que se puede definir una solución de (PVI).

**Demostración.** Es claro que  $I_{\mathbf{x}_0}$  es un intervalo, además es no vacío debido al Teorema de Cauchy-Peano. Si  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  son soluciones de (PVI) definidas respectivamente en intervalos  $I_1, I_2$  que contienen al origen entonces, al ser  $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0)$ , la Proposición 4.1.2 garantiza que  $\mathbf{x}_1|_{I_1 \cap I_2} = \mathbf{x}_2|_{I_1 \cap I_2}$ . Por ello, la fórmula:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_1(t) & \text{si } t \in I_1, \\ \mathbf{x}_2(t) & \text{si } t \in I_2, \end{cases}$$

define correctamente una función  $\mathbf{x} : I_1 \cup I_2 \rightarrow U$  que necesariamente es solución de (PVI). Este procedimiento de *pegado* de soluciones, permite definir correctamente una solución en todo  $I_{\mathbf{x}_0}$ . La propia definición de  $I_{\mathbf{x}_0}$  implica que es el mayor intervalo en el que se puede definir una solución.

Veamos ahora que  $I_{\mathbf{x}_0}$  es abierto. Si no lo fuera, entonces contiene al menos uno de sus extremos finitos  $t_* \in I_{\mathbf{x}_0}$ . Sea  $\mathbf{y} : [t_* - a, t_* + a] \rightarrow U$  la solución de

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_*) = \mathbf{x}(t_*) \in U.$$

Entonces tenemos  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$  para  $t \in [t_* - a, t_* + a] \cap I_{\mathbf{x}_0}$  y podríamos pegar las soluciones  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  para obtener así una solución definida en un intervalo mayor que  $I_{\mathbf{x}_0}$ , lo cual es absurdo. ★

Nos referiremos en lo que sigue a la solución de (PVI) definida sobre el intervalo  $I_{\mathbf{x}_0}$  como a una **solución maximal**.

*Es muy importante resaltar que el intervalo  $I_{\mathbf{x}_0}$  depende fuertemente el dominio de definición  $U$  de  $\mathbf{f}$  que estemos considerando.* Si examinamos la ecuación

$$\dot{x} = f(x)$$

con  $f(x) = x$  con dominio de definición  $U = \mathbf{R}$ , obtenemos que para todo  $x_0 \in \mathbf{R}$  se tiene  $I_{x_0} = \mathbf{R}$ . Si ahora consideramos la función  $f$  anterior definida en  $U = (-2, 2)$ , entonces la solución de la ecuación diferencial  $\dot{x}(t) = x(t)$  que satisface  $x(0) = 1$  es precisamente  $x(t) = e^t$ . Claramente,  $x(t) \in U$  sólo si  $t \in I_1 = (-\infty, \log 2)$ .

Intentaremos ahora entender cuándo  $I_{\mathbf{x}_0}$  coincide con  $\mathbf{R}$ .

**Proposición 4.4.2** Sea  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $\mathbf{x} : I_{\mathbf{x}_0} := (\tau_-, \tau_+) \rightarrow U$  la solución maximal de (PVI). Supongamos que  $\tau_+$  es finito. Si  $\mathbf{x}(t)$  permanece acotada para  $t \in [0, \tau_+)$  entonces necesariamente se acerca a la frontera de  $U$ :

$$\text{dist}(\mathbf{x}(t), \partial U) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \tau_+.$$



Un resultado análogo vale si  $\tau_-$  es finito. En particular, si  $U$  es acotado entonces toda solución maximal para la que se tiene  $\tau_+ < \infty$  necesariamente se acerca a  $\partial U$  cuando  $t \rightarrow \tau_+$ .

**Demostración de la Proposición 4.4.2.** Supongamos que no es así. Sea pues  $(t_n)$  una sucesión en  $[0, \tau_+)$  que converge a  $\tau_+$  para la que

$$\text{dist}(\mathbf{x}(t_n), \partial U) > r > 0.$$

Consideremos ahora la solución  $\mathbf{y}_n$  del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}_n = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \\ \mathbf{y}_n(t_n) = \mathbf{x}(t_n). \end{cases}$$

Dicha función está definida en el intervalo  $[t_n - a_n, t_n + a_n]$ , donde, recuérdese,

$$a_n := \frac{r}{\max_{B(\mathbf{x}(t_n); r)} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}.$$

Como  $(\mathbf{x}(t_n))$  es una sucesión acotada, también lo es el conjunto:

$$\Omega := \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \overline{B(\mathbf{x}(t_n); r)}.$$

Claramente,  $\overline{\Omega} \subset U$  y para todo  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$0 < a := \frac{r}{\max_{\overline{\Omega}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|} < a_n.$$

Así pues, las soluciones  $\mathbf{y}_n$  están definidas en intervalos de longitud al menos  $2a$ . La Proposición 4.1.2 garantiza que  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_n(t)$  para  $t \in [t_n - a, t_n + a] \cap I_{\mathbf{x}_0}$ ; si  $n_0$  es suficientemente grande, al ser  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \tau_+$ , tenemos que

$$t_{n_0} + a > \tau_+,$$

y por tanto pegando  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}_{n_0}$  se obtendría una solución de (PVI) definida en un intervalo mayor que  $I_{\mathbf{x}_0}$ , lo cual es imposible. ★

Es importante observar que, de hecho, hemos demostrado lo siguiente:

**Corolario 4.4.3** *Con la notación de la Proposición 4.4.2, si  $\tau_+ < \infty$  entonces todo  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$  obtenido como un límite*

$$\mathbf{p} = \lim_{t_n \rightarrow \tau_+} \mathbf{x}(t_n),$$

*para cierta sucesión  $t_n \rightarrow \tau_+$ , es necesariamente un punto de la frontera de  $U$ .*

De la demostración de este resultado se extraen dos consecuencias inmediatas en el caso  $U = \mathbf{R}^d$  (ahora  $\partial U = \emptyset$ ):

**Corolario 4.4.4** *Supongamos  $U = \mathbf{R}^d$ .*

- i) Si  $\mathbf{x}$  es una solución maximal acotada entonces necesariamente  $I_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{R}$ .  
ii) Si  $\mathbf{x}$  es una solución maximal con  $\tau_+ < \infty$  entonces necesariamente*

$$\lim_{t \rightarrow \tau_+} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty.$$

Una aplicación de la Proposición 4.4.2 la ilustra el siguiente ejercicio:

**Ejercicio 4.4.5** *Supongamos  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$  es localmente Lipschitz y  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq B\|\mathbf{x}\| + A$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ . Pruébese que las soluciones maximales de*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

*están definidas en todo  $\mathbf{R}$ .*

**Solución:** Supongamos que no es así; existe un  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$  para el que el intervalo  $I_{\mathbf{x}_0} = (\tau_-, \tau_+)$  tiene uno de sus extremos finitos. Supongamos, para fijar ideas, que  $\tau_+ < \infty$ . El Corolario 4.4.4 implica que

$$\lim_{t \rightarrow \tau_+} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty.$$

Veamos que esto no puede tener lugar. Por hipótesis,

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))\| \leq B\|\mathbf{x}(t)\| + A.$$

La desigualdad de Gronwall, en la forma presentada en Teorema 4.3.3 implica que, para  $t \in [0, \tau_+)$ ,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq e^{tB} \|\mathbf{x}_0\| + \frac{A}{B} (e^{tB} - 1) \leq \left( \|\mathbf{x}_0\| + \frac{A}{B} \right) e^{\tau_+ B} - \frac{A}{B},$$

lo cual implica que  $\|\mathbf{x}(t)\|$  es acotada, contradiciendo que  $\tau_+ < \infty$ . ★

Esta misma estrategia permite probar, utilizando la forma general de la desigualdad de Gronwall (Teorema 4.3.3), lo siguiente: *si  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq g(\|\mathbf{x}\|)$  y las soluciones de la ecuación diferencial  $\dot{\rho} = g(\rho)$  están definidas para todo  $t \in \mathbf{R}$  entonces las soluciones de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  también lo están.*

**Ejercicio 4.4.6** Consideremos la ecuación del péndulo:

$$\ddot{\theta} + \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Definamos:

$$H(\theta, p) = \frac{1}{2} |p|^2 + \cos\theta.$$

i) Pruébese que si  $\theta(t)$  es una solución de la ecuación entonces  $H(\theta(t), \dot{\theta}(t))$  es constante.

ii) Conclúyase que si  $H(\theta(0), \dot{\theta}(0)) < 1$  entonces la trayectoria está definida para todo  $t \in \mathbf{R}$ .



# Capítulo 5

## Introducción a la teoría cualitativa

### 5.1. Flujo

En esta sección introduciremos algunas nociones geométricas que serán muy útiles a la hora de representar las soluciones de una ecuación diferencial. Comenzamos introduciendo una aplicación que manda un dato inicial  $\mathbf{x}_0$  al valor en el instante  $t$  de la correspondiente solución. Esta forma de considerar las soluciones *colectivamente* – codificadas a través de una única aplicación – puede resultar confusa en un principio. Veremos más adelante cómo este enfoque que proporciona el marco conceptual y analítico adecuado para abordar numerosas cuestiones.

Sea  $\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbf{R}^d)$  con  $U \subset \mathbf{R}^d$  abierto. Como hicimos en el capítulo anterior, denotamos por  $I_{\mathbf{x}_0}$  al intervalo maximal sobre el que se puede definir la solución de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (5.2)$$

Llamaremos **flujo** de  $\mathbf{f}$  a la aplicación que a  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $t \in I_{\mathbf{x}_0}$  asocia el valor de la solución del problema de valor inicial (5.1), (5.2) en el instante  $t$ ,

$$\phi_t(\mathbf{x}_0) := \mathbf{x}(t).$$

Naturalmente,  $\phi$  está definida en el conjunto

$$\Omega := \bigcup_{\mathbf{x}_0 \in U} I_{\mathbf{x}_0} \times \{\mathbf{x}_0\},$$

y, para todo  $(t, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\phi_t(\mathbf{x}_0)), \quad \phi_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0.$$

Obsérvese que si  $t, s \in I_{\mathbf{x}_0}$  y  $t + s \in I_{\mathbf{x}_0}$  entonces se tiene:

$$\phi_{t+s}(\mathbf{x}_0) = \phi_t(\phi_s(\mathbf{x}_0)). \quad (5.3)$$

Esto es una consecuencia directa de la unicidad de soluciones del problema de valor inicial asociado a  $\mathbf{f}$ .<sup>1</sup>

Obsérvese también que para definir  $\phi$  sólo es necesario que el problema de valor inicial (5.1), (5.2) posea una única solución maximal sea cual sea  $\mathbf{x}_0 \in U$ .

Una consecuencia importante de la identidad (5.3) es la siguiente.

**Lema 5.1.1** *Sea  $t_0 \in \mathbf{R}$  tal que  $t_0, -t_0 \in I_{\mathbf{x}_0}$  para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Entonces*

$$\phi_{t_0} : U \rightarrow U$$

*es biyectiva y continua. Además,  $(\phi_{t_0})^{-1} = \phi_{-t_0}$ ; en particular,  $\phi_{t_0}$  es un homeomorfismo de  $U$ .*

**Demostración:** la hipótesis que hemos hecho sobre  $t_0$  garantiza que  $\phi_{t_0}$  y  $\phi_{-t_0}$  están bien definidas como aplicaciones de  $U$  en si mismo. La continuidad de estas aplicaciones se basa en la Proposición 4.2.1 del capítulo anterior, que afirma que, para  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in U$ , existe  $L > 0$  tal que

$$|\phi_{t_0}(\mathbf{x}_0) - \phi_{t_0}(\mathbf{y}_0)| \leq e^{t_0 L} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|.$$

Por último, aplicando (5.3) obtenemos:

$$\mathbf{x}_0 = \phi_0(\mathbf{x}_0) = \phi_{t_0-t_0}(\mathbf{x}_0) = \phi_{t_0}(\phi_{-t_0}(\mathbf{x}_0)) = \phi_{-t_0}(\phi_{t_0}(\mathbf{x}_0)),$$

con lo que  $\phi_{t_0}$  y  $\phi_{-t_0}$  son inversas una de la otra. ★

Es importante observar que la conclusión del lema es cierta si  $\mathbf{f}$  es únicamente continua siempre que haya unicidad de soluciones. De hecho, utilizando los teoremas de Cauchy-Peano y de Ascoli-Arzelá es fácil probar el siguiente resultado.

**Lema 5.1.2** *Supongamos que  $\mathbf{f} \in C(U; \mathbf{R}^d)$  y que las soluciones de (5.1), (5.2) son únicas. Entonces, si  $t_0$  es como en el Lema 5.1.1 entonces  $\phi_{t_0} : U \rightarrow U$  es una biyección continua con inversa continua.*

<sup>1</sup>La identidad (5.3) simplemente expresa que

$$\mathbf{x}(t+s) = \mathbf{y}(t)$$

siendo  $\mathbf{x}$  la solución de (5.1), (5.2) e  $\mathbf{y}$  la solución de la ecuación diferencial (5.1) que satisface  $\mathbf{y}(0) = \phi_s(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(s)$ . Para comprobar que se verifica la igualdad anterior, basta considerar la función  $\tilde{\mathbf{y}}(\tau) := \mathbf{y}(\tau - s)$ . Claramente,  $\tilde{\mathbf{y}}$  es una solución de la ecuación diferencial que verifica  $\tilde{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{x}(s)$ . El teorema de unicidad de soluciones garantiza que  $\mathbf{x}(\tau) = \tilde{\mathbf{y}}(\tau)$  para todo  $\tau \in I_{\mathbf{x}_0}$ , en particular,  $\mathbf{x}(t+s) = \tilde{\mathbf{y}}(t+s) = \mathbf{y}(s)$  como queríamos demostrar.

Demostremos ahora una generalización de lo visto hasta el momento.

**Teorema 5.1.3** *Supongamos que se satisfacen las hipótesis del Lema 5.1.1 y que, además,  $\mathbf{f} \in C^k(U; \mathbf{R}^d)$ . Entonces  $\phi_{t_0} : U \rightarrow U$  es un difeomorfismo de clase  $C^{k-1}$ .*<sup>2</sup>

Utilizaremos el método de las aproximaciones sucesivas para probar el siguiente resultado de diferenciabilidad respecto del dato inicial.

**Demostración.** Comencemos demostrando el resultado para  $k = 2$ . Supongamos en un primer momento que la conclusión es cierta, esto es, que  $\phi_t$  es diferenciable con derivadas parciales contiuas. Pongamos

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{x}) := \phi_t(\mathbf{x}),$$

formalmente – esto es, suponiendo que se puedan intercambiar la derivada en  $\mathbf{x}$  y en  $t$  – obtenemos la siguiente ecuación diferencial para  $D\mathbf{y}(t; \cdot)_{\mathbf{x}}$ :

$$D\dot{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}} = D\left(\frac{d}{dt}\mathbf{y}\right)_{\mathbf{x}} = D(\mathbf{f} \circ \mathbf{y})_{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}_{\mathbf{y}(t; \mathbf{x})}D\mathbf{y}(t; \cdot)_{\mathbf{x}},$$

con

$$D\mathbf{y}(0; \cdot)_{\mathbf{x}} = \text{Id}.$$

Obsérvese que, con todo, para todo  $\mathbf{x} \in U$ , el sistema,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t; \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t; \mathbf{x})), \\ \dot{Y}(t; \mathbf{x}) = D\mathbf{f}_{\mathbf{y}(t; \mathbf{x})}Y(t; \mathbf{x}), \\ \mathbf{y}(0; \mathbf{x}) = \mathbf{x}, Y(0; \mathbf{x}) = \text{Id}, \end{cases} \quad (5.4)$$

tiene una única solución  $(\mathbf{y}(t; \mathbf{x}), Y(t; \mathbf{x}))$ , puesto que la aplicación  $(\mathbf{f}(\mathbf{x}), D\mathbf{f}_{\mathbf{x}})$  es de clase  $C^1$  en  $U \times \mathbf{R}^{d^2}$ . Más aún, tenemos que el método de las aproximaciones sucesivas produce una sucesión  $(\mathbf{y}_n(t; \mathbf{x}); Y_n(t; \mathbf{x}))$  de funciones que converge uniformemente hacia una solución exacta de (5.4). Un ejemplo de dichas aproximaciones son las dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_n(t; \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1}(s; \mathbf{x})) ds, \\ Y_n(t; \mathbf{x}) = \text{Id} + \int_0^t D\mathbf{f}_{\mathbf{y}_{n-1}(s; \mathbf{x})}Y_{n-1}(s; \mathbf{x}) ds, \\ \mathbf{y}_0(t; \mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}, Y_0(t; \mathbf{x}) \equiv \text{Id}. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Recuérdese que una aplicación  $\varphi : U \rightarrow V$ , donde  $U, V \subset \mathbf{R}^d$  son abiertos, es un **difeomorfismo** de clase  $C^k$  si y sólo si es biyectiva y  $\varphi \in C^k(U; \mathbf{R}^d)$ . El Teorema de la Función Inversa garantiza entonces que  $\varphi^{-1} \in C^k(V; \mathbf{R}^d)$ .

Claramente  $D\mathbf{y}_0(t; \cdot)_{\mathbf{x}} = \text{Id} = Y_0(t; \mathbf{x})$ . Veamos por inducción que esto es cierto para todo  $n \in \mathbf{N}$ . Supongamos que los es para  $0, 1, \dots, n-1$ . En ese caso,

$$\begin{aligned} D\mathbf{y}_n(t; \cdot)_{\mathbf{x}} &= \text{Id} + \int_0^t D\mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1}(s; \cdot))_{\mathbf{x}} ds \\ &= \text{Id} + \int_0^t D\mathbf{f}_{\mathbf{y}_{n-1}(s; \mathbf{x})} D\mathbf{y}_{n-1}(s; \cdot)_{\mathbf{x}} ds \\ &= \text{Id} + \int_0^t D\mathbf{f}_{\mathbf{y}_{n-1}(s; \mathbf{x})} Y_{n-1}(s; \mathbf{x}) ds \\ &= Y_n(t; \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Tenemos pues que  $\mathbf{y}_n(t; \mathbf{x})$  converge uniformemente hacia la única solución de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t; \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t; \mathbf{x})), \\ \mathbf{y}(0; \mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

Por otro lado, la sucesión de diferenciales  $D\mathbf{y}_n(t; \cdot)_{\mathbf{x}} = Y_n(t; \mathbf{x})$  también converge uniformemente hacia cierta función  $Y(t; \mathbf{x})$ . Necesariamente se tiene que  $\phi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(t; \mathbf{x})$  es diferenciable y

$$D\mathbf{y}(t; \cdot)_{\mathbf{x}} = D(\phi_t)_{\mathbf{x}} = Y(t; \mathbf{x}).$$

La demostración del caso correspondiente a  $k > 2$  se concluye mediante un sencillo argumento por inducción. ★

**Observación 5.1.4** *Es posible probar que la conclusión del Teorema 5.1.3 sigue siendo válida si  $\mathbf{f} \in C^{k-1}(U; \mathbf{R}^d)$  (en lugar de  $k$  veces diferenciable).*

Concluimos esta sección con una bonita aplicación geométrica del teorema anterior.

**Lema 5.1.5 (de Morse)** *Sea  $f \in C^2(\mathbf{R}^d)$ . Supongamos que para dos valores reales  $a < b$  los conjuntos de nivel  $f^{-1}(a)$  y  $f^{-1}(b)$  son no vacíos. Si se tiene que  $\|\nabla f(\mathbf{x})\| > m > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in f^{-1}([a, b])$  entonces  $f^{-1}(a)$  y  $f^{-1}(b)$  son difeomorfos.*

**Demostración.** Consideremos el campo de vectores

$$X(\mathbf{x}) := \frac{1}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|^2} \nabla f(\mathbf{x}).$$

Sea  $U \subset \mathbf{R}^d$  un entorno abierto de  $f^{-1}([a, b])$  sobre el que se siga teniendo la estimación  $\|\nabla f(\mathbf{x})\| > m > 0$ . Entonces  $X$  está bien definido y es de clase  $C^1$



sobre  $U$ . Tomemos  $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}([a, b])$ ; entonces si  $\mathbf{x}(t)$  es la solución del problema de valor inicial:

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

se tiene que, para  $t$  suficientemente pequeño,  $\mathbf{x}(t) \in U$  y, para dichos valores de  $t$

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t)) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot X(\mathbf{x}(t)) = 1,$$

es decir,

$$f(\mathbf{x}(t)) = f(\mathbf{x}(0)) + t.$$

En particular, si  $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(a)$  se tiene  $\mathbf{x}(t) \in f^{-1}(a+t)$  para  $t$  suficientemente pequeño. De hecho, la identidad anterior garantiza que la solución  $\mathbf{x}(t)$  está definida en  $t \in [0, b-a]$ . Si no fuera así, y  $\mathbf{x}(t)$  sólo estuviera definida para  $t \in [0, \delta)$  con  $\delta \leq b-a$  entonces, visto que  $\mathbf{x}(t) \in f^{-1}([a, b])$  siempre dista de  $\partial U$  más que una constante positiva, se tiene que  $\lim_{t \rightarrow \delta} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty$ . Pero esto es imposible, puesto que

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \|X(\mathbf{x}(t))\| \leq 1/\alpha,$$

por lo que, para  $t \in [0, \delta)$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_0\| + t/\alpha \leq \|\mathbf{x}_0\| + \delta/\alpha.$$

★

## 5.2. Órbitas

Introducimos a continuación la noción de **órbita** a través de un punto. Se trata simplemente de la curva del espacio que recorre una solución de la ecuación diferencial.

Más precisamente, definimos, dado un punto  $\mathbf{x}_0 \in U$ , la **órbita positiva** de  $\mathbf{x}_0$  como el conjunto:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}^+ := \{\phi_t(\mathbf{x}_0) : t \in I_{\mathbf{x}_0}, t \geq 0\};$$

análogamente, llamaremos **órbita negativa** de  $\mathbf{x}_0$  a

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}^- := \{\phi_t(\mathbf{x}_0) : t \in I_{\mathbf{x}_0}, t \leq 0\}.$$

Finalmente, la **órbita** de  $\mathbf{x}_0$  será:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0} := \mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}^+ \cup \mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}^-.$$

Ilustremos estos conceptos en el sistema lineal más simple:

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad a \geq 0.$$

Tenemos  $f(x) = ax$  para  $x \in \mathbf{R}$ . El flujo de  $f$  viene dado por:

$$\phi_t(x_0) = e^{at}x_0.$$

Claramente, tenemos:

$$\mathcal{O}_{x_0} = \begin{cases} (0, \infty), & x_0 > 0 \\ \{0\} & x_0 = 0 \\ (-\infty, 0) & x_0 < 0 \end{cases}.$$

Vemos pues que distintos datos iniciales  $x_0$  pueden dar lugar a las mismas órbitas. Las órbitas son bien intervalos, bien puntos (este siempre es el caso para sistemas unidimensionales); este sistema sólo posee tres órbitas distintas.

En dimensión uno, las órbitas tienen una estructura muy sencilla. O bien degeneran en un punto (soluciones de equilibrio), o bien son la imagen de un intervalo abierto por una aplicación diferenciable y monótona (son difeomorfos a  $\mathbf{R}$ ).

En varias dimensiones, la situación es un poco más compleja.

**Teorema 5.2.1** *Sea  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$  una órbita de  $\mathbf{f}$ . Entonces se tiene una única de estas posibilidades:*

- i)  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x}_0\}$ ; esto es,  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio.*
- ii)  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$  no se corta a si misma; en otras palabras,*

$$t \in I_{\mathbf{x}_0} \rightarrow U \ni \phi_t(\mathbf{x}_0) \quad \text{es inyectiva.}$$

*iii)  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$  no se reduce a un punto; pero se corta a si misma. En este caso, se tiene que  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$  es una curva cerrada simple.<sup>3</sup>*

La demostración de este resultado será consecuencia de los siguientes lemas.

**Lema 5.2.2** *Sea  $\mathbf{x}(t)$  una solución maximal de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  que toma dos veces el mismo valor:*

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2), \quad \text{con } t_1 \neq t_2,$$

*entonces necesariamente  $\mathbf{x}(t)$  es periódica de periodo  $t_1 - t_2$  (en particular,  $I_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{R}$ ).*

<sup>3</sup>En otras palabras,  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$  es homeomorfa al círculo  $\mathbf{S}^1$ .

**Demostración.** Sea  $\mathbf{y}_+(t) := \mathbf{x}(t+T)$ . Claramente, si  $I_+ = I_{\mathbf{x}_0} - T$  entonces  $\mathbf{y}_+ : I_+ \rightarrow U$  es una solución de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

que satisface  $\mathbf{y}_+(t_1) = \mathbf{x}(t_1+T) = \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_1)$ . Por tanto, por la maximalidad de  $\mathbf{x}$  necesariamente tenemos  $I_+ \subset I_{\mathbf{x}_0}$  (de lo contrario,  $\mathbf{y}_+$  prolongaría a  $\mathbf{x}$ ). Como consecuencia de esto se tiene que  $I_{\mathbf{x}_0} = (-\infty, b)$  y

$$\mathbf{y}_+(t) = \mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t), \quad t < b.$$

Definiendo ahora  $\mathbf{y}_-(t) := \mathbf{x}(t+T)$  y observando que  $\mathbf{y}_-(t_2) := \mathbf{x}(t_2)$ , podemos, razonando como antes, deducir que  $I_{\mathbf{x}_0} = (a, \infty)$  con lo que  $I_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{R}$  y  $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$  para todo  $t \in \mathbf{R}$ . ★

**Lema 5.2.3** Si  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow U$  es continua, periódica y no constante, entonces posee un periodo mínimo  $T > 0$ .

**Demostración.** Supongamos que esto no es así. Sea  $P \subset [0, \infty)$  el conjunto de periodos de  $\gamma$ . Sea  $T = \inf P$ . Necesariamente  $T \in P$ , puesto que, tomando  $T_n \in P$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$  obtenemos, para todo  $t \in \mathbf{R}$ ,

$$\gamma(t+T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t+T_n) = \gamma(t).$$

Así pues tenemos que  $T = 0$ ; en este caso, dado  $n \in \mathbf{N}$ , todo  $t \in \mathbf{R}$  puede escribirse de la forma:

$$t = t_n + k_n T_n$$

donde  $t_n \in [0, T_n)$  y  $k_n \in \mathbf{Z}$ . Se sigue que  $\gamma(t) = \gamma(t_n + k_n T_n) = \gamma(t_n)$ . Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  deducimos que  $\gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) = \gamma(0)$ , es decir, que  $\gamma$  es constante. ★

Con estos dos resultados en mente, podemos probar que se  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$  es una órbita que se corta a si misma y no degenera en un punto entonces verifica:

$$t \in \mathbf{R} \rightarrow U \ni \phi_t(\mathbf{x}_0) \quad \text{es } T\text{-periódica,}$$

para cierto  $T > 0$ . Además, si  $T$  es el periodo mínimo, se tiene que  $\phi_t(\mathbf{x}_0)$  es inyectiva sobre  $[0, T)$  (si no fuera así, el Lema 5.2.2 garantizaría la existencia de un periodo estrictamente más pequeño que  $T$ ) y, por tanto, que  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$  es una curva cerrada simple.

### 5.3. Diagrama de fases

Es importante observar que, si dos órbitas se cortan,

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{y}_0} \neq \emptyset$$

para ciertos  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in U$  entonces necesariamente coinciden  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0} = \mathcal{O}_{\mathbf{y}_0}$ .<sup>4</sup>

Llamaremos **diagrama de fases** de  $\mathbf{f}$  a la partición de  $U$  por órbitas de  $\mathbf{f}$ . Dicho de un modo más informal, el diagrama de fases es la descripción de todas las trayectorias del sistema sin tener en cuenta su parametrización. Dedicaremos esta sección a mostrar distintos resultados que permiten obtener información sobre el diagrama de fases de una ecuación dada.

#### 5.3.1. Reparametrización

Un **cambio de parámetro** o **reparametrización** es una aplicación monótona y derivable entre dos intervalos de la recta real:

$$\sigma : J \rightarrow I.$$

Cuando se aplica un cambio de parámetro a una solución  $\mathbf{x}(t)$  de la ecuación diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  tenemos que la función  $\mathbf{y}(s) := \mathbf{x}(\sigma(s))$  satisface la ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{y}}(s) = \sigma'(s) \mathbf{f}(\mathbf{y}(s)). \quad (5.5)$$

Un cambio de parámetro tiene por efecto que el campo de vectores venga afectado por un factor que dilata o contrae las velocidades. Esta observación es la clave del siguiente resultado, que muestra cómo, mediante un cambio de parámetro, se puede simplificar una ecuación diferencial.

**Lema 5.3.1** *Sea  $\rho : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$  una función escalar, continua y que no se anula. Dada una solución  $\mathbf{x}(t)$  del problema de Cauchy*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \rho(\mathbf{x}(t)) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (5.6)$$

<sup>4</sup>Haremos la demostración suponiendo que el flujo de  $\mathbf{f}$  está definido en  $\mathbf{R} \times U$ . Supongamos que  $\phi_{t_1}(\mathbf{x}_0) = \phi_{t_2}(\mathbf{y}_0)$ . Entonces, escribiendo  $t_2 = t_1 + r$  tenemos

$$\phi_{t_1}(\mathbf{x}_0) = \phi_{t_1+r}(\mathbf{y}_0) = \phi_{t_1}(\phi_r(\mathbf{y}_0)).$$

Aplicando ahora  $\phi_{-t_1}$  a ambos lados obtenemos:

$$\mathbf{x}_0 = \phi_r(\mathbf{y}_0).$$

Como  $\mathcal{O}_{\phi_r(\mathbf{y}_0)} = \mathcal{O}_{\mathbf{y}_0}$  concluimos el resultado.

es posible encontrar un cambio de parámetro  $\sigma$  tal que  $\mathbf{y}(s) := \mathbf{x}(\sigma(s))$  es solución de

$$\dot{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(s)), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0.$$

**Demostración.** Sea  $\mathbf{x} : I \rightarrow U$  una solución de (5.6). Considérese la aplicación, definida para  $t \in I$ :

$$\tau(t) := \int_0^t \rho(\mathbf{x}(s)) ds.$$

Claramente,  $\tau(0) = 0$  y

$$\tau'(t) = \rho(\mathbf{x}(t)) \neq 0,$$

con lo que  $\tau$  define un cambio de parámetro, en particular, la función inversa  $\sigma := \tau^{-1}$  está bien definida sobre  $J := \tau(I)$ . Pongamos  $\mathbf{y}(s) := \mathbf{x}(\sigma(s))$ ; utilizando la identidad (5.5) deducimos,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(s) &= \sigma'(s) \rho(\mathbf{y}(s)) \mathbf{f}(\mathbf{y}(s)) \\ &= \frac{1}{\tau'(\sigma(s))} \rho(\mathbf{y}(s)) \mathbf{f}(\mathbf{y}(s)) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(s)), \end{aligned}$$

además, visto que  $\sigma(0) = 0$  tenemos necesariamente  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , como queríamos demostrar. ★

En consecuencia, *los campos de vectores  $\rho f$  y  $f$  tienen las mismas órbitas*. Este tipo de argumento es bastante flexible; de hecho, permite obtener el diagrama de fases de un campo  $\rho f$  a partir del de  $f$  incluso cuando  $\rho$  se anula.

**Ejercicio 5.3.2** Dibújese aproximadamente el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y^2 - x) \\ \dot{y} = -y(y^2 - x) \end{cases}$$

e indíquese el sentido de cada trayectoria. Indicación: utilícese, cuando sea posible, la reparametrización del Lema 5.3.1.

Como consecuencia directa del Lema 5.3.1 es posible probar lo siguiente:

**Lema 5.3.3** Sea  $\mathbf{f} : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$  localmente Lipschitz y  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d$ . Entonces, la única solución de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \frac{1}{1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{y})\|^2} \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^d \end{cases}$$

está definida para todo  $t \in \mathbf{R}$ . Además, existe  $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivable y estrictamente monótona tal que  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \sigma$ , siendo  $\mathbf{x}$  la solución de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Dejamos la demostración a cargo del lector. Obsérvese que el resultado anterior expresa, en particular, que las órbitas de  $\mathbf{f}$  y de  $(1 + \|\mathbf{f}\|^2)^{-1} \mathbf{f}$  coinciden. Así pues, efectos de órbitas, y en el caso  $U = \mathbf{R}^d$ , podemos restringirnos considerar sistemas cuyo flujo está definido en todo  $\mathbf{R} \times U$ .

### 5.3.2. Cambios de coordenadas

Comencemos con dos ejemplos que ilustran la filosofía de lo que pretendemos llevar a cabo en esta sección.

1. Un modo de calcular las soluciones de

$$\dot{x} = x \log x, \quad x(0) = x_0 \in (0, \infty). \quad (5.7)$$

es introducir, dada una solución  $x(t)$ , la curva:

$$y(t) := \log x(t). \quad (5.8)$$

La función  $y$  satisface

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} \log x(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \log x(t) = y(t). \quad (5.9)$$

Por tanto,

$$y(t) = e^t y_0, \quad y_0 = \log x_0 \quad (5.10)$$

y, necesariamente,  $x(t) = \log^{-1} y(t) = \exp y(t)$  satisface

$$x(t) = \exp(e^t y_0) = \exp(e^t \log x_0). \quad (5.11)$$

2. El problema de valor inicial para la ecuación

$$\ddot{x} + x = 0$$

puede escribirse como el de un sistema de primer orden:

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -x, \quad (x(0), p(0)) = (x_0, p_0)$$

Escribámoslo en coordenadas polares. Sea

$$h(r, \theta) = (h_1(r, \theta), h_2(r, \theta)) := (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

definida para  $r \in (0, \infty)$  y  $\theta \in (-\pi, \pi)$ . Supongamos que

$$x(t) = h_1(r(t), \theta(t)) = r(t) \cos \theta(t),$$

$$p(t) = h_2(r(t), \theta(t)) = r(t) \operatorname{sen} \theta(t).$$

Claramente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} &= Dh_{(r(t), \theta(t))} \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -r \operatorname{sen} \theta(t) \\ \operatorname{sen} \theta(t) & r \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} &= (Dh_{(r(t), \theta(t))})^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{pmatrix} = (Dh_{(r(t), \theta(t))})^{-1} \begin{pmatrix} p(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} \\ &= (Dh_{(r(t), \theta(t))})^{-1} \begin{pmatrix} h_2(r(t), \theta(t)) \\ -h_1(r(t), \theta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r(t) \cos \theta(t) & r(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\ -\operatorname{sen} \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(t) \operatorname{sen} \theta(t) \\ -r(t) \cos \theta(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que

$$r(t) = r_0, \quad \theta(t) = -t + \theta_0,$$

donde  $r_0$  y  $\theta_0$  están por determinar. Por tanto,

$$x(t) = r_0 \cos(-t + \theta_0), \quad p(t) = r_0 \operatorname{sen}(-t + \theta_0)$$

y

$$(x_0, p_0) = h(r_0, \theta_0) = r_0 (\cos \theta_0, \operatorname{sen} \theta_0).$$

De aquí se sigue que

$$(r_0, \theta_0) = h^{-1}(x_0, p_0) = \left( \sqrt{x_0^2 + p_0^2}, \operatorname{arcsen} \frac{p_0}{\sqrt{x_0^2 + p_0^2}} \right).$$

En definitiva, aplicando un cambio de variables  $h$  a las soluciones de una ecuación hemos obtenido soluciones de otra ecuación más sencilla. Como  $h^{-1}$  está bien definida, podemos invertir el proceso y deducir información sobre las soluciones de la ecuación original.

Esta filosofía se puede aplicar en un contexto general. Sea  $h : V \rightarrow U$  un difeomorfismo entre dos abiertos de  $\mathbf{R}^d$  (en el ejemplo anterior,  $d = 2$ ,  $V = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$  y  $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ). Recuérdese que la diferencial  $Dh_{\mathbf{y}}$  de una

aplicación  $h$  de un abierto de  $\mathbf{R}^d$  en  $\mathbf{R}^d$  en un punto  $\mathbf{y}$  es la aplicación lineal dada por la matriz de entradas

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}).$$

El teorema de la función inversa garantiza que el hecho de que  $Dh_{\mathbf{y}}$  sea invertible es equivalente a que  $h$  sea inyectiva en un entorno de  $\mathbf{y}$ .

Sea  $\mathbf{x}(t)$  la solución del problema de valor inicial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in U,$$

y pongamos

$$\mathbf{x}(t) = h(\mathbf{y}(t)),$$

para cierta  $\mathbf{y}(t)$  a valores en  $V$ . Entonces,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = Dh_{\mathbf{y}(t)}\dot{\mathbf{y}}(t),$$

es decir,

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = (Dh_{\mathbf{y}(t)})^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = (Dh_{\mathbf{y}(t)})^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (Dh_{\mathbf{y}(t)})^{-1}\mathbf{f}(h(\mathbf{y}(t))).$$

En otras palabras, escribiendo

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) := (Dh_{\mathbf{y}})^{-1}\mathbf{f}(h(\mathbf{y})),$$

hemos demostrado que  $\mathbf{y}(t) = h^{-1}(\mathbf{x}(t))$  es solución de:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(0) = h^{-1}(\mathbf{x}_0) \in V.$$

En particular, acabamos de probar el siguiente resultado.

**Proposición 5.3.4 (Cambio de coordenadas)** *Sea  $h : V \rightarrow U$  un difeomorfismo entre los abiertos  $U, V \subset \mathbf{R}^d$ . Sea  $\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbf{R}^d)$  y  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Sea  $\mathbf{y}$  la única solución maximal del problema de valor inicial:*

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = (Dh_{\mathbf{y}(t)})^{-1}\mathbf{f}(h(\mathbf{y}(t))), \quad \mathbf{y}(0) = h^{-1}(\mathbf{x}_0) \in V.$$

Entonces  $\mathbf{x}(t) := h(\mathbf{y}(t))$  es la única solución maximal de

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in U.$$

Dicho de otro modo, si  $\phi_t$  es el flujo de  $\mathbf{f}$  entonces:

$$\psi_t := h^{-1} \circ \phi_t \circ h$$

es el flujo del campo de vectores:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) := (Dh_{\mathbf{y}})^{-1}\mathbf{f}(h(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in V.$$

**Ejercicio 5.3.5** *Dibujar aproximadamente el diagrama de fases de*

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = \log x. \end{cases}$$



## 5.4. Estructura local de las órbitas

Hemos visto que el diagrama de fases de una ecuación sólo puede constar de órbitas periódicas, órbitas difeomorfas a la recta real u órbitas que constan únicamente de un punto. A continuación analizaremos la estructura local del diagrama de fases en torno a un punto  $\mathbf{x}_0$ ; veremos que si dicho punto no es un equilibrio del sistema, entonces las órbitas cercanas a  $\mathbf{x}_0$  son localmente difeomorfas a  $\mathbf{R}$ .

**Teorema 5.4.1** *Sea  $\mathbf{x}_0 \in U$  tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ . Entonces existe un entorno  $\Omega \subset U$  de  $\mathbf{x}_0$  y un difeomorfismo  $h: V \rightarrow \Omega$ , siendo  $V$  un entorno del origen tal que*

$$(h^{-1} \circ \phi_t \circ h)(y_1, \dots, y_d) = (y_1 + t, y_2, \dots, y_d).$$

En otras palabras, existe un cambio de coordenadas en torno a  $\mathbf{x}_0$  que transforma la ecuación diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  en la ecuación

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 1, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \vdots \\ \dot{y}_d = 0. \end{cases}$$

**Demostración:** Para fijar ideas, supongamos  $d = 2$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{x}_0 = 0$  y  $f_1(0, 0) \neq 0$ ; de no ser así basta aplicar una traslación y una permutación de las variables. El cambio de coordenadas se construirá utilizando las trayectorias de la ecuación:

$$h(y_1, y_2) := \phi_{y_1}(0, y_2).$$

Obsérvese que  $h$  transforma las rectas  $y_2 = a$  en las órbita  $\mathcal{O}_{(0,a)}$ . Veamos que  $h$  es un difeomorfismo en un entorno del origen. Para ello, comprobaremos que  $Dh_{(0,0)}$  es invertible. En primer lugar,

$$\frac{\partial}{\partial y_1} h(0, 0) = \frac{d}{dt} \phi_t(0, 0) |_{t=0} = \mathbf{f}(\phi_0(0, 0)) = \mathbf{f}(0, 0).$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial}{\partial y_2} h(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y_2} \phi_0(0, y_2) |_{y_2=0} = \frac{\partial}{\partial y_2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} |_{y_2=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\det Dh_{(0,0)} = f_1(0, 0) \neq 0.$$

Por último, verificamos la conclusión del Teorema:

$$\phi_t(h(y_1, y_2)) = \phi_t(\phi_{y_1}(0, y_2)) = \phi_{t+y_1}(0, y_2) = h(y_1 + t, y_2),$$

como queríamos probar. ★



# Capítulo 6

## Estabilidad

### 6.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Nuestro objetivo ahora será investigar la estructura de las órbitas en el entorno de un punto de equilibrio. A diferencia de lo que sucedía en torno a un punto de no equilibrio, las soluciones de una ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

cercanas a una solución estacionaria pueden tener una estructura relativamente compleja. Prueba de ello es la diversidad de comportamientos que se observan en un sistema lineal bidimensional en torno a la solución de equilibrio  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ .

Comencemos introduciendo un poco de terminología.

**Definición 6.1.1** *Sea  $\mathbf{c}$  un punto de equilibrio de una ecuación diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Se dice que la solución estacionaria  $\mathbf{c}$  es:*

a) **estable** siempre que, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{c}\| < \delta$  entonces la solución  $\mathbf{x}(t)$  de la ecuación diferencial que satisface  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  está definida para todo  $t \in [0, \infty)$  y verifica:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{c}\| < \varepsilon, \quad t \in [0, \infty).$$

b) **asintóticamente estable** si es estable y, además, existe  $r > 0$  tal que toda solución  $\mathbf{x}(t)$  de la ecuación diferencial que satisface  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{c}\| < r$  verifica además:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}.$$

Obsérvese también que el que una solución de equilibrio sea estable implica lo siguiente: si  $\mathbf{x}_0^n$  es una sucesión de puntos en  $\mathbf{R}^d$  que converge a  $\mathbf{c}$  entonces las soluciones  $\mathbf{x}_n(t)$  de la ecuación diferencial que satisfacen  $\mathbf{x}_n(0) = \mathbf{x}_0^n$  convergen uniformemente en  $[0, \infty)$  a la solución estacionaria  $\mathbf{c}$ .

### 6.1.1. Ecuaciones lineales

De hecho, de la estructura de las soluciones de una ecuación lineal se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.2** *Si todos los autovalores de una matriz  $A$  tienen parte real estrictamente negativa entonces toda solución de  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0.$$

Más aún, se tiene una cota para  $t \geq 0$ :

$$\|e^{tA}\| \leq \sigma(t) e^{-t\mu}, \quad \mu := \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ autovalor de } A\},$$

siendo  $\sigma(t)$  un polinomio de grado menor que  $d$ .

Dicho de otro modo, todas las soluciones convergen a la solución de equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 6.1.3** *Pruébese que si  $A$  tiene un autovalor con parte real estrictamente positiva entonces dado  $\varepsilon > 0$  existe una solución de la ecuación diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  que satisface:*

$$\|\mathbf{x}(0)\| = \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty.$$

Daremos a continuación un algoritmo que permite el cálculo directo de la exponencial  $e^{tA}$  de una matriz  $d \times d$ . Comencemos recordando un importante resultado de álgebra lineal.

**Teorema 6.1.4 (Cayley-Hamilton)** *Sea  $A$  una matriz real  $d \times d$  y sea*

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda \operatorname{Id})$$

*su polinomio característico. Entonces,*

$$p(A) = 0.$$

Con este resultado en mente y teniendo en cuenta que  $e^{C+D} = e^C e^D$  siempre que las matrices  $C$  y  $D$  conmuten ( $CD = DC$ ) es fácil demostrar la siguiente fórmula, válida en el caso en que  $A$  posea un único autovalor.

**Ejercicio 6.1.5** *Supongamos que  $A$  sólo posea un autovalor  $\lambda_0$  de multiplicidad  $d$ . Entonces,*

$$e^{tA} = e^{t\lambda_0} \left( \operatorname{Id} + tQ + \frac{t^2}{2}Q^2 + \dots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}Q^{d-1} \right),$$

siendo  $Q := A - \lambda_0 \operatorname{Id}$ .

En el caso general, es posible demostrar lo siguiente.

**Teorema 6.1.6 (Putzer)** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  los autovalores de  $A$  enumerados de forma arbitraria (la lista puede contener repeticiones si los autovalores no son simples). Entonces

$$e^{tA} = r_1(t) \text{Id} + r_2(t) P_1 + \dots + r_d(t) P_{d-1},$$

donde  $P_j = \prod_{k=1}^j (A - \lambda_k \text{Id})$  y las funciones  $r_j : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  se obtienen resolviendo recursivamente:

$$\dot{r}_1 = \lambda_1 r_1, \quad r_1(0) = 1,$$

y, para  $j = 2, \dots, d$ ,

$$\dot{r}_j = \lambda_j r_j + r_{j-1}, \quad r_j(0) = 0.$$

**Demostración.** Sea,

$$\Phi(t) := r_1(t) \text{Id} + r_2(t) P_1 + \dots + r_d(t) P_{d-1}.$$

Vamos a comprobar que  $\dot{\Phi} = A\Phi$  y  $\Phi(0) = \text{Id}$  (esto último es inmediato). La unicidad de soluciones para la ecuación lineal implicará que necesariamente  $\Phi(t) = e^{tA}$ . Derivemos y sustituyamos,

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \dot{r}_1 \text{Id} + \dot{r}_2 P_1 + \dots + \dot{r}_d P_{d-1} \\ &= \lambda_1 r_1 \text{Id} + (\lambda_2 r_2 + r_1) P_1 + \dots + (\lambda_d r_d + r_{d-1}) P_{d-1} \\ &= r_1 (\lambda_1 \text{Id} + P_1) + r_2 (\lambda_2 P_1 + P_2) + \dots + r_d \lambda_d P_{d-1} \\ &= r_1 A + r_2 A P_1 + \dots + r_d A P_{d-1} \\ &= A\Phi. \end{aligned}$$

Hemos utilizado el hecho que, por definición,  $P_{j+1} = A P_j - \lambda_{j+1} P_j$  para  $j = 1, \dots, d-1$  y, por el teorema de Cayley-Hamilton,  $P_d = 0$ . ★

**Demostración del Teorema 6.1.2.** Sabemos que  $\|e^{tA} \mathbf{x}_0\| \leq \|e^{tA}\| \|\mathbf{x}_0\|$  y, por el resultado anterior,

$$\|e^{tA}\| \leq |r_1(t)| + |r_2(t)| \|P_1\| + \dots + |r_d(t)| \|P_{d-1}\|.$$

Será conveniente suponer que los autovalores de  $A$  vienen enumerados de modo que:

$$\text{Re } \lambda_1 \leq \text{Re } \lambda_2 \leq \dots \leq \text{Re } \lambda_d < 0.$$

Basta probar que todas las  $r_j$  convergen a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Claramente, es el caso para  $r_1(t) = e^{t\lambda_1}$ , ya que  $|r_1(t)| = e^{t \text{Re } \lambda_1}$ . Vamos a probar que, para  $t \geq 0$  se tiene

$$|r_j(t)| \leq \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{t \text{Re } \lambda_j}, \quad j = 1, \dots, d;$$

lo haremos por inducción en  $j$ . Es trivialmente cierto para  $j = 1$ . Supongamos que lo es para  $1, \dots, j < d$  y comprobémoslo para  $j + 1$ . Tenemos:

$$\dot{r}_{j+1} = \lambda_{j+1} r_{j+1} + r_j, \quad r_{j+1}(0) = 0,$$

y, por tanto, para  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} r_{j+1}(t) &= e^{t\lambda_{j+1}} \int_0^t e^{-s\lambda_{j+1}} r_j(s) ds, \\ |r_{j+1}(t)| &\leq e^{t\operatorname{Re}\lambda_{j+1}} \int_0^t e^{-s\operatorname{Re}\lambda_{j+1}} |r_j(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{(j-1)!} e^{t\operatorname{Re}\lambda_{j+1}} \int_0^t e^{s\operatorname{Re}(\lambda_j - \lambda_{j+1})} s^{j-1} ds \\ &\leq \frac{t^j}{j!} e^{t\operatorname{Re}\lambda_{j+1}}. \end{aligned}$$

La última desigualdad es consecuencia de que, al ser  $\operatorname{Re}\lambda_j \leq \operatorname{Re}\lambda_{j+1}$ , se tiene  $e^{s\operatorname{Re}(\lambda_j - \lambda_{j+1})} \leq 1$  para  $t \geq 0$ . Así pues, hemos demostrado que para todo  $t \geq 0$  se tiene:

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| &\leq e^{t\operatorname{Re}\lambda_1} + t \|P_1\| e^{t\operatorname{Re}\lambda_2} + \dots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \|P_{d-1}\| e^{t\operatorname{Re}\lambda_d} \\ &\leq e^{t\operatorname{Re}\lambda_d} \left( 1 + t \|P_1\| + \dots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} \|P_{d-1}\| \right). \end{aligned}$$

★

### 6.1.2. El caso general: el principio de linealización

Supongamos que  $\mathbf{c} \in U$  es un punto de equilibrio de  $\mathbf{f}$ . Utilizando la fórmula de Taylor se deduce:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}),$$

donde  $\mathbf{r}$  es una función que satisface

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|} = 0.$$

Así pues, si escribimos:

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{x}(t) - \mathbf{c},$$

tenemos:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}_{\mathbf{c}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}_{\mathbf{c}}\mathbf{z} + \mathbf{r}_{\mathbf{c}}(\mathbf{z})$$

donde

$$\mathbf{r}_c(\mathbf{z}) := \mathbf{r}(\mathbf{z} + \mathbf{c}), \quad \lim_{\mathbf{z} \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}_c(\mathbf{z})\|}{\|\mathbf{z}\|} = 0.$$

Vemos pues, que, para  $\mathbf{x}$  cercano a  $\mathbf{c}$ , los campos de vectores  $\mathbf{f}$  y  $D\mathbf{f}_c$  son prácticamente iguales. Cabe pues esperar que también lo sean las soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes. El llevar el estudio de una ecuación  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  en torno al punto de equilibrio  $\mathbf{c}$  al estudio de la **ecuación linealizada**:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = D\mathbf{f}_c \mathbf{z}(t),$$

se conoce como **principio de linealización**. Se trata de una idea heurística que muchas veces conduce a resultados rigurosos. Un ejemplo de ello es el siguiente resultado.

**Teorema 6.1.7** *Sea  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$  y  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^d$  un punto de equilibrio de la ecuación:*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

*Si los autovalores de  $D\mathbf{f}_c$  tienen parte real estrictamente negativa entonces la solución estacionaria  $\mathbf{c}$  es asintóticamente estable.*

Haremos la demostración en las secciones sucesivas.

## 6.2. Conjuntos $\omega$ -límite

Comencemos introduciendo un concepto útil en el estudio del comportamiento para tiempos grandes de las soluciones de una ecuación diferencial:

**Definición 6.2.1** *Sea  $\mathbf{x}(t) = \phi_t(\mathbf{x})$  una solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  definida en todo  $\mathbf{R}$ . Se llama conjunto  $\omega$ -límite de  $\mathbf{x}$  y se denota por  $\omega(\mathbf{x}_0)$  al conjunto de los puntos  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^d$  que se obtienen como límites*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}$$

con  $t_n \rightarrow \infty$ .

Si una solución de equilibrio  $\mathbf{c}$  es asintóticamente estable entonces el  $\omega$ -límite de soluciones que arrancan cerca de  $\mathbf{c}$  es el conjunto  $\{\mathbf{c}\}$ .

Claramente,  $\omega(\mathbf{y}) = \omega(\mathbf{x}_0)$  para todos los puntos  $\mathbf{y} \in \mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}$ .

Algunas propiedades destacables del  $\omega$ -límite son:

**Lema 6.2.2** (i) El conjunto  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es cerrado.

(ii) Si  $\mathbf{p}_0 \in \omega(\mathbf{x}_0)$  y  $\mathbf{p}(t) := \phi_t(\mathbf{p}_0)$  es la solución que arranca de  $\mathbf{p}_0$  entonces necesariamente  $\mathbf{p}(t) \in \omega(\mathbf{x}_0)$  para todo  $t \in I_{\mathbf{p}_0}$ .

(iii) Si  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}^+$  es acotado entonces  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es no vacío, acotado y conexo. Además:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi_t(\mathbf{x}_0), \omega(\mathbf{x}_0)) = 0. \quad (6.1)$$

**Demostración.** Comencemos probando (i). Sea  $(\mathbf{p}_n)$  una sucesión en  $\omega(\mathbf{x}_0)$  que converge a un cierto  $\mathbf{p}$ . Comprobemos que  $\mathbf{p} \in \omega(\mathbf{x}_0)$ . Dado  $k > 0$  elegimos inductivamente  $t_k$  tal que  $t_k > t_{k-1}$ ,  $t_k > k$  y

$$\|\phi_{t_k}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{p}_k\| < 1/k.$$

Necesariamente,  $\phi_{t_k}(\mathbf{x}_0)$  converge a  $\mathbf{p}$  y  $t_k \rightarrow \infty$ , con lo que  $\mathbf{p} \in \omega(\mathbf{x}_0)$ .

La propiedad (ii) tampoco es difícil. Sea  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{p}_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces, para  $t \in \mathbf{R}$  se tiene que

$$\phi_{t+t_n}(\mathbf{x}_0) = \phi_t(\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0)) \rightarrow \phi_t(\mathbf{p}_0), \quad n \rightarrow \infty.$$

Por tanto,  $\phi_t(\mathbf{p}_0) \in \omega(\mathbf{x}_0)$ .

Probemos ahora (iii). Es inmediato comprobar que  $\omega(\mathbf{x}_0) \neq \emptyset$  es acotado. Veamos que además es conexo. Supongamos que no lo fuera; entonces podemos escribir  $\omega(\mathbf{x}_0) = A \cup B$  con  $A, B \subset \mathbf{R}^d$  cerrados, acotados, y disjuntos. Sea

$$\delta := \text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|.$$

Claramente, existen sucesiones  $(t_n^A)$ ,  $(t_n^B)$  que convergen a infinito tales que:

$$\text{dist}(\phi_{t_n^A}(\mathbf{x}_0), A) < \frac{\delta}{2}, \quad \text{dist}(\phi_{t_n^B}(\mathbf{x}_0), B) < \frac{\delta}{2}.$$

En particular,  $\text{dist}(\phi_{t_n^B}(\mathbf{x}_0), A) > \delta/2$ . Por continuidad, necesariamente existe  $(t_n)$  que converge a infinito para la cual

$$\text{dist}(\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0), A) = \frac{\delta}{2}.$$

Al ser  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}_0}^+$  acotada,  $(\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0))$  también lo es. Podemos por tanto extraer una subsucesión que converge a un cierto  $\mathbf{p}$ , que necesariamente pertenece a  $\omega(\mathbf{x}_0)$ . No obstante,  $\text{dist}(\mathbf{p}, A) = \delta/2$ , con lo que  $\mathbf{p} \notin A \cup B = \omega(\mathbf{x}_0)$  lo cual es una contradicción.

Veamos por último que se cumple (6.1). Supongamos que no fuera así; existe entonces una sucesión  $(t_n)$ , que tiende a infinito para la cual:

$$\text{dist}(\phi_{t_n}(\mathbf{x}_0), \omega(\mathbf{x}_0)) > r > 0.$$

Nuevamente, como la semiórbita positiva es acotada, existe una subsucesión  $(\phi_{t_{n'}}(\mathbf{x}_0))$  que converge, por definición a un punto  $\mathbf{p} \in \omega(\mathbf{x}_0)$ . Esto contradice entonces que  $\text{dist}(\mathbf{p}, \omega(\mathbf{x}_0)) > 0$ . ★



### 6.3. Funciones de Liapunov

Utilizaremos estas nociones en la demostración del siguiente resultado:

**Proposición 6.3.1** Sea  $\mathbf{f} \in C^1(U; \mathbf{R}^d)$  y  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^d$  un punto de equilibrio. Supongamos que existe  $V : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  continua en un entorno  $\Omega$  de  $\mathbf{c}$ , abierto y acotado, tal que:

$$V(\mathbf{c}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \text{ para } \mathbf{x} \neq \mathbf{c}, \quad (6.2)$$

y las soluciones de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \Omega, \quad \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{c}. \end{cases}$$

verifican  $\mathbf{x}(t) \in \Omega$  y la función  $V(\mathbf{x}(t))$  es decreciente. Entonces  $\mathbf{c}$  es estable. Si  $V(\mathbf{x}(t))$  es estrictamente decreciente entonces  $\mathbf{c}$  es asintóticamente estable.

Una función  $V$  que satisface las hipótesis de la proposición se denomina una **función de Liapunov** para el equilibrio  $\mathbf{c}$ .

El sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix},$$

correspondiente al péndulo con rozamiento  $k > 0$ , admite la función de Liapunov asociada al equilibrio  $\mathbf{c} = 0$ :

$$V(x, p) = x^2 + p^2.$$

**Demostración.** Consideremos los conjuntos de nivel

$$L_k := \{\mathbf{x} \in U : V(\mathbf{x}) < k\}.$$

1. Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $k > 0$  tal que  $L_k \subset B(\mathbf{c}; \varepsilon)$ . Si no fuera así, podríamos encontrar  $\varepsilon_0 > 0$  y una sucesión de puntos  $\mathbf{x}_n \in \Omega$  tales que  $\mathbf{x}_n \in L_{1/n}$  y  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{c}\| \geq \varepsilon_0$ . Cualquier punto de acumulación  $\mathbf{p}$  de la sucesión  $(\mathbf{x}_n)$  verifica  $V(\mathbf{p}) = 0$ , y por tanto  $\mathbf{p} = \mathbf{c}$ . La hipótesis (6.2) garantiza que  $\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| > 0$ , lo cual es una contradicción.

2. Elijamos  $k$  de modo que  $\overline{L_k} \subset \Omega$  (esto es posible por el paso anterior). Tomemos  $\mathbf{x}_0 \in L_k$ ; entonces la solución correspondiente está definida para todo  $t \in \mathbf{R}$  y permanece en  $L_k$ . Para todo  $t \in I_{\mathbf{x}_0}$  tenemos, al ser  $V \circ \mathbf{x}$  decreciente,

$$V(\mathbf{x}(t)) < V(\mathbf{x}(0)) < k,$$

por tanto  $\mathbf{x}(t)$  permanece en el conjunto acotado  $L_k \subset \Omega$ . Como  $\overline{L_k} \subset \Omega$  tenemos necesariamente

$$\text{dist}(\mathbf{x}(t), \Omega^c) > \gamma > 0.$$

Por tanto, podemos aplicar la Proposición 4.4.2 y concluir que necesariamente  $I_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{R}$ .

**3.** *El punto de equilibrio  $\mathbf{c}$  es estable.* Sea  $\varepsilon > 0$ ; elijamos  $L_k \subset B(\mathbf{c}; \varepsilon)$  (utilizando el paso 1) y sea  $\delta > 0$  tal que  $B(\mathbf{c}; \delta) \subset L_k$  ( $L_k$  es un abierto que contiene  $\mathbf{c}$ ). Si tomamos  $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{c}; \delta)$  entonces la solución correspondiente verifica  $\mathbf{x}(t) \in L_k$  para todo  $t \in \mathbf{R}$  (por el paso 2). Como  $L_k \subset B(\mathbf{c}; \varepsilon)$  concluimos que  $\mathbf{c}$  es estable.

**4.** *Si  $V$  es estrictamente decreciente a lo largo de las trayectorias que arrancan de puntos de  $\Omega$  entonces  $\mathbf{c}$  es asintóticamente estable.* Sea  $\mathbf{x}_0 \in \overline{L_k} \subset B(\mathbf{c}; r) \subset \Omega$ . Tenemos que la solución correspondiente satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t)) = m < k. \quad (6.3)$$

El límite existe por ser  $V \circ \mathbf{x}$  decreciente. Por tanto, al ser  $\mathbf{x}$  acotada, el Lema 6.2.2 implica que el conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(\mathbf{x}_0)$  es no vacío. Como  $V$  es continua, de (6.3) se sigue que todos los puntos  $\mathbf{p}_0 \in \omega(\mathbf{x}_0)$  satisfacen

$$V(\mathbf{p}_0) = m.$$

Si  $m = 0$  entonces, por (6.2), se concluye que  $\omega(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{c}\}$  y el resultado queda demostrado. Si  $m > 0$  entonces se tendría que la solución  $\mathbf{p}(t)$  que arranca de  $\mathbf{p}_0$  verifica  $\mathbf{p}(t) \in \omega(\mathbf{x}_0)$  para todo  $t \in \mathbf{R}$  (de nuevo, por el Lema 6.2.2). En particular,

$$V(\mathbf{p}(t)) = m, \quad t \in \mathbf{R}$$

lo cual contradice que  $V$  es estrictamente decreciente a lo largo de las soluciones que arrancan de  $\Omega$ . ★

**Corolario 6.3.2** *Si  $V : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  es continua y diferenciable en  $\Omega \setminus \{\mathbf{c}\}$ , verifica (6.2) y*

$$DV_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{c}\},$$

*entonces  $V$  es una función de Liapunov en un entorno del punto de equilibrio  $\mathbf{c}$ .*

**Demostración.** Razonando como en la demostración de la Proposición 6.3.1, sabemos que existe  $k > 0$  tal que  $\Omega' := L_k$  está contenido en una bola abierta centrada en  $\mathbf{c}$  contenida en  $\Omega$ . Si  $\mathbf{x}$  es una solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  tal que  $\mathbf{x}(0) \in \Omega' \setminus \{\mathbf{c}\}$  entonces se tiene que  $\mathbf{x}(t)$  permanece en  $\Omega'$  para  $t$  suficientemente pequeño y

$$\frac{d}{dt}(V(\mathbf{x}(t)))|_{t=0} = \nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(0)) < 0.$$

De hecho, la solución  $\mathbf{x}(t)$  permanece en  $U$  para todo  $t$  en el que esté definida, de lo contrario existiría un instante mínimo  $t^*$  para el que  $V(\mathbf{x}(t^*)) = k$ . Claramente esto es imposible, puesto que para todo  $t \in [0, t^*)$  tenemos (al ser  $L_k \subset \Omega$ ),

$$\frac{d}{dt}(V(\mathbf{x}(t))) = \nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) < 0.$$

Por ello, la función  $V(\mathbf{x}(t))$  es estrictamente decreciente. ★

## 6.4. Demostración del Teorema 6.1.7

Presentamos ahora un método para construir una función de Liapunov asociada a un sistema lineal con autovalores de parte real negativa.

**Lema 6.4.1** *Sea  $A$  una matriz cuyos autovalores tienen parte real estrictamente negativa. Entonces la función*

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} \|e^{sA}\mathbf{x}\|^2 ds \quad (6.4)$$

*es una función de Liapunov para el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  asociada al equilibrio  $\mathbf{c} = 0$ .*

**Demostración.** Visto que todos los autovalores  $A$  tienen parte real negativa, el Teorema 6.1.2 garantiza que, para  $t \geq 0$  se tiene :

$$\|e^{sA}\mathbf{x}\|^2 \leq e^{-2\mu s} \sigma(s) \|\mathbf{x}\|^2$$

siendo  $\mu = \max_{\lambda \in \text{sp}A} |\text{Re}\lambda|$  y  $\sigma$  un polinomio en  $t$ . Por tanto, la integral (6.4) es convergente sea cual sea  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ . Claramente  $V(0) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) > 0$  si  $\mathbf{x} \neq 0$ . Además, para  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$  no nulo se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x}) \cdot A\mathbf{x} &= 2 \int_0^{\infty} e^{sA}\mathbf{x} \cdot e^{sA}A\mathbf{x} ds \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{sA}\mathbf{x} \cdot \frac{d}{ds}e^{sA}\mathbf{x} ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \|e^{sA}\mathbf{x}\|^2 ds \\ &= -\|\mathbf{x}\|^2 < 0. \end{aligned}$$

★

Obsérvese que este resultado, en combinación con la Proposición (6.3.1), proporciona otra demostración del Teorema 6.1.2.

**Demostración del Teorema 6.1.7.** Sea  $V$  la función de Liapunov asociada a  $A := D\mathbf{f}_{\mathbf{c}}$  construida mediante el lema anterior. Vamos a probar que  $V(\cdot - \mathbf{c})$  es de hecho una función de Liapunov para el equilibrio  $\mathbf{c}$  de la ecuación  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Escribamos utilizando la fórmula de Taylor,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

con

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{c}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|} = 0.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot (A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{r}(\mathbf{x})) \\ &= -\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2 + \nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Ahora bien, escribiendo,  $C := 2 \int_0^\infty \|e^{sA}\|^2 ds$  (la integral es finita debido al Teorema 6.1.2) tenemos:

$$\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}) \leq 2 \int_0^\infty |e^{sA}(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot e^{sA}\mathbf{r}(\mathbf{x})| ds \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|,$$

siendo

$$C = 2 \int_0^\infty \|e^{sA}\|^2 ds.$$

Por tanto, si elegimos entorno  $\Omega \subset U$  de  $\mathbf{c}$  de modo que

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{2C} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

entonces podemos afirmar que, para  $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{c}\}$  se tiene

$$\nabla_{\mathbf{x}}V(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq -\frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2,$$

lo cual concluye la demostración. ★

# Capítulo 7

## Algunos ejercicios

A continuación, presentamos algunos ejercicios sobre lo estudiado en este curso.

1. Un día empieza a nevar con ritmo constante. Un quitanieves cuya velocidad es inversamente proporcional a la altura de la nieve acumulada sale a mediodía y avanza 2 Kms. en la primera hora y 1 Km. en la segunda hora. ¿A qué hora empezó a nevar?
2. La Ley de enfriamiento de Newton propone que la tasa de variación de la temperatura de un cuerpo respecto del tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del mismo y la del ambiente que lo rodea. Escribese esta ley en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales y resuélvase el siguiente problema:

El presidente y el primer ministro piden café y reciben tazas a igual temperatura y al mismo tiempo. El presidente agrega inmediatamente una pequeña cantidad de leche fría pero no se toma el café hasta 5 minutos después. El primer ministro espera 5 minutos, añade luego la misma cantidad de leche fría y comienza después a tomarse su café. ¿Quién lo bebe más caliente?

Observación: Téngase en cuenta que la temperatura de una mezcla de líquidos de masas  $m_a$  y  $m_b$  viene dada por:

$$T_m = \frac{T_a m_a + T_b m_b}{m_a + m_b}$$

donde  $T_a$  y  $T_b$  representan a las temperaturas de los líquidos  $a$  y  $b$  respectivamente.

3. En el instante inicial  $t = 0$  un punto (digamos  $x_1$ ) se encuentra en la posición  $(0, L)$  y otro punto  $x_2$  en el origen de coordenadas. Imaginemos que ambos puntos están unidos por una cuerda de longitud  $L$  y que  $x_2$  comienza a

moverse con velocidad 1 hacia la derecha siguiendo la recta real. Escríbase la ecuación diferencial que caracteriza a la trayectoria del punto  $x_1$ . Esta curva plana se llama *tractriz* o *curva del perro*.

4. En los organismos microscópicos la tasa de crecimiento (respecto del tiempo) del número de células (individuos) es proporcional al número de células presente en el instante considerado. Escríbase la ecuación diferencial correspondiente. ¿Cuánto tarda la población en duplicar su tamaño? Interpretese la constante de proporcionalidad.
5. Cuatro orugas se encuentran inicialmente en reposo en las cuatro esquinas de un cuadrado cuyo centro es el origen. En el instante inicial empiezan a moverse con velocidad constante de modo que cada una se dirige hacia la que tiene delante. Descríbase la trayectoria que siguen las orugas.
6. Pruébese que la ecuación

$$\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)}$$

tiene *infinitas* soluciones que satisfacen  $x(0) = 0$ .

7. *Los dos últimos casos de SHERLOCK HOLMES*. En el número 16 de la calle Aberdeen la señora Murdock aparece muerta. Los forenses determinan que ha sido asesinada y que el hecho se consumó aproximadamente un día antes de hallar su cadáver. Este dato es impreciso y se decide contar con los servicios de S. Holmes y su amigo el Dr. Watson. Al llegar a la escena del crimen (que estaba intacta) los investigadores encuentran una taza de té sobre la mesa, llena aún.

El doctor Watson sugiere resolver el problema de la siguiente manera. “Si medimos la temperatura del té en este instante con precisión arbitraria, es posible, utilizando un modelo matemático adecuado, calcular con exactitud el instante en el que el té fue preparado”.<sup>1</sup> Sherlock, escéptico dado que la taza de té está prácticamente a temperatura ambiente, va a la Biblioteca Británica y comprueba con sorpresa que la ley de enfriamiento de NEWTON hace viable la propuesta de Watson. Acto seguido, calculan la hora exacta del asesinato de la Sra. Murdock.<sup>2</sup>

- a) Plántese la ecuación diferencial resultante y explíquese el proceder de Sherlock.

---

<sup>1</sup>Es bien sabido que el té inglés se prepara a 100 grados centígrados.

<sup>2</sup>Es notable que las casas inglesas mantengan una temperatura ambiente constante gracias a su perfecto aislamiento.

Una semana más tarde el Sr. Harper es asesinado en el West End londinense. La situación es similar: no es posible determinar con exactitud la hora del crimen. Watson y Holmes son llamados nuevamente a la escena y comprueban que el Sr. Harper había dejado un vaso de whisky sobre la mesa. Watson comprueba que el líquido se había derramado por un pequeño orificio en la base del vaso. Holmes, intentando emular a su compañero en el caso anterior sugiere lo siguiente.<sup>3</sup> “Si es posible medir la cantidad de líquido remanente en el vaso, aunque sea imperceptible, y estudiamos la ley que vincula el vaciado de un recipiente con el tiempo, podemos estimar con bastante exactitud la hora en que fue asesinado”.<sup>4</sup> Con un entusiasmo desmedido regresa a la Biblioteca Británica y tropieza en sus pesquisas con la famosa Ley de TORRICELLI, que reza así: *El cuadrado de la variación respecto del tiempo de la altura de un líquido en un recipiente con un orificio en su base es proporcional a la propia altura del líquido*. Después de hacer unos cálculos, Sherlock entra en una profunda depresión, y decide abandonar el oficio de investigador criminal.

b) Repítase aquí lo pedido en a) y determínese por qué Holmes no pudo resolver el caso.

8. Resuélvase las siguientes ecuaciones diferenciales:

- (i)  $\dot{x} = x^3$ .
- (ii)  $\dot{x} = x(1 - x)$ .
- (iii)  $\dot{x} = x(1 - x) - c$ .

9. Sea  $f \in C^1(U)$ , siendo  $U \subset \mathbf{R}$  un intervalo abierto. Sea  $x_0 \in U$  un cero de  $f$ . Probar que entonces:

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{f(y)} dy = \pm\infty.$$

10. Mediante un argumento análogo al del cálculo de la solución de la ecuación autónoma encuéntrase una fórmula para las soluciones de la ecuación *de variables separables*:

$$\dot{x}(t) = g(t) f(x(t)).$$

11. Resuélvase las ecuaciones diferenciales:

- (i)  $\dot{x} = \text{sen}(t) x$ .
- (ii)  $\dot{x} = g(t) \tan x$ .

---

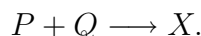
<sup>3</sup>Estaba evidentemente entusiasmado por el éxito de las matemáticas y sus aplicaciones criminalísticas.

<sup>4</sup>La exploración forense había determinado que el Sr. Harper no había llegado a probar el whisky, de modo que se sabía la cantidad inicial con exactitud.

12. Dibújense aproximadamente las soluciones no negativas de la ecuación:

$$y' + y + y^2 = \frac{1}{x^4}, \quad x > 0.$$

13. Una reacción química se produce por la interacción de una molécula de la sustancia  $P$  con otra de la sustancia  $Q$  para dar una molécula nueva  $X$ . Abreviadamente esto se representa así:



Sea  $x(t)$  la concentración de  $X$  en el instante  $t$  y sean  $p$  y  $q$  las concentraciones iniciales de  $P$  y  $Q$  respectivamente. Teniendo en cuenta que la concentración de la sustancia  $X$  está formada por una proporción  $a$  de concentración de  $P$  y una proporción  $b$  de concentración de  $Q$  ( $a + b = 1$ ) y que la reacción obedece a la ley de acción de masas (esto es, admitiendo que la variación de  $x(t)$  es proporcional al producto de las concentraciones de  $P$  y  $Q$ ) hallar la expresión de  $x(t)$  si  $x(0) = 0$ .

14. En un circuito eléctrico con autoinducción tiene lugar el paso de la corriente alterna. La tensión  $U(t)$  es una función dada, mientras que la resistencia  $R$  y la autoinducción  $L$  son constantes. La intensidad inicial viene dada por  $I_0$ . Hallar la expresión de la intensidad  $I(t)$  en función del tiempo.
15. Dibujar aproximadamente las soluciones de la ecuaciones:

$$y' = \operatorname{sen}(y).$$

$$y' = x^2 - y^2.$$

16. Calcular la solución de la ecuación  $y'(x) = y + h_N(x)$  con  $y(0) = 0$  donde  $h_N(x)$  vale  $N$  para los  $x$  tales que  $|x - 1| < \frac{1}{2N}$  y es 0 para el resto. Encontrar el límite de la solución cuando  $N \rightarrow \infty$ . ¿Qué ecuación diferencial verifica la función límite?
17. Sean  $p(x)$ ,  $q(x)$  y  $r(x)$  funciones continuas en  $[a, b]$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ) y tales que  $p(a) = p(b) = 0$ ,  $p(x) > 0$  en  $(a, b)$ ,  $q(x) > 0$  en  $[a, b]$  y además

$$\int_a^{a+\epsilon} \frac{ds}{p(s)} = \int_{b-\epsilon}^b \frac{ds}{p(s)} = +\infty, \quad (0 < \epsilon < b - a).$$

Demostrar que todas las soluciones del problema

$$p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$



que existen en  $(a, b)$  convergen a  $r(b)/q(b)$  cuando  $x \rightarrow b$  pero sólo una de ellas converge a  $r(a)/q(a)$  cuando  $x \rightarrow a$  (todas las demás lo hacen a  $+\infty$  o a  $-\infty$ ).

18. Escribir las siguientes ecuaciones de segundo orden como un sistema de primer orden y representar gráficamente el campo de vectores asociado al sistema:

a)  $x'' = -g$ , donde  $g$  es una constante.

b)  $x'' = -x$ .

c)  $x'' = -\text{sen}(x)$ .

19. Sea  $f$  una función  $C^1$  definida en un abierto de  $\mathbb{R}^d$  con valores en  $\mathbb{R}^d$ . Demuéstrese que si una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

satisface

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$$

para ciertos  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , entonces  $\mathbf{x}(t)$  es periódica de período  $T := t_2 - t_1$ . ¿Es esto verdad si  $f$  depende de  $t$ ?

20. En las condiciones del ejercicio anterior pruébese que si  $\mathbf{x}$  es no constante entonces necesariamente existe un período mínimo positivo.
21. Determínese el mayor intervalo en el que las soluciones del siguiente sistema están definidas:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^2 \\ x_2' &= x_1^2 + x_2 \end{aligned}$$

22. Estúdiense la unicidad de soluciones de los siguientes problemas de valor inicial:

$$i) \quad \begin{cases} \dot{x} = x \log x \\ x(0) = x_0 \in [0, \infty) \end{cases}, \quad ii) \quad \begin{cases} \dot{x} = x (\log x)^2 \\ x(0) = x_0 \in [0, \infty) \end{cases}.$$

Determínese también el mayor intervalo en el que las soluciones están definidas.

23. Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lipschitz. Dadas dos soluciones  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de la ecuación diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

pruébese la desigualdad

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \leq |\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)| e^{tL},$$

siendo  $L > 0$  y  $t \in I$ .

24. Sean  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$  funciones continuas de  $\mathbb{R}^d$  en  $\mathbb{R}^d$ , al menos una de ellas Lipschitz. Sean  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  tales que

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1), \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_2),$$

y supongamos que se tiene

$$|\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{x})| < \varepsilon$$

para cierto  $\varepsilon > 0$  y todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . Demuéstrese que entonces

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \leq |\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)| e^{tL} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{tL} - 1).$$

25. Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  Lipschitz y  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, \infty)$  continua. Sea  $\mathbf{y}$  una solución de

$$\dot{\mathbf{y}} = \rho(\mathbf{y}) \mathbf{f}(\mathbf{y}),$$

definida en cierto intervalo  $I$ . Pruébese que existe un intervalo  $J$  y una biyección  $\varphi : J \rightarrow I$  tales que  $\mathbf{x} := \mathbf{y} \circ \varphi$  es solución de:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

26. Sea  $\mathbf{f}$  como en el ejercicio anterior. Compruébese que el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{1 + |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

posee una única solución definida en todo  $\mathbb{R}$ . ¿Qué relación existe entre las soluciones de este problema de valor inicial y las de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d \end{cases} ?$$

27. Determínese el diagrama de fases del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1). \end{cases}$$

Dada una solución  $(x_1(t), x_2(t))$ , calcúlese el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t)^2 + x_2(t)^2]$ . (Indicación: puede ser útil escribir el sistema en coordenadas polares).

28. Una ecuación diferencial  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  se dice homogénea si  $f(\lambda t, \lambda x) = (t, x)$  para todo  $\lambda > 0$ . Demuéstranse las siguientes afirmaciones.

a) El cambio de variables

$$(t, x) = h(t, y)$$

donde

$$h(t, y) := (t, ty), \quad t \neq 0,$$

transforma la ecuación homogénea en una ecuación de variables separables.

b) Si  $x(t)$  es una trayectoria de una ecuación homogénea, entonces también lo es  $\lambda^{-1}x(\lambda t)$  para  $\lambda > 0$ .

c) Si  $\mathcal{O}_{(t_0, x_0)}$  es una órbita de una ecuación homogénea, también lo es cualquier imagen suya por una homotecia.

29. Calcúlese el diagrama de fases de:

$$\dot{x}(t) = 2\frac{x(t)}{t} - \frac{x(t)^2}{t^2}$$

para  $t \neq 0$ . (Indicación: puede utilizarse el cambio de variables del ejercicio anterior).

30. Escribir en coordenadas polares y resolver.

$$\text{i) } \begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 - bx_2, \\ \dot{x}_2 = bx_1 + ax_2. \end{cases}, \quad \text{ii) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - (x_1)^2. \end{cases}$$

31. En la clase de Ecuaciones Diferenciales, formada por un total de  $(N + 1)$  personas, se extiende el rumor de que va a haber aprobado general. En cada instante  $t > 0$ , la población total se divide en tres categorías:

$X$  : personas ignorantes del rumor,

$Y$  : personas que extienden activamente el rumor,

$Z$  : personas que han oído el rumor, pero no lo extienden.

Supondremos que cuando dos personas que extienden el rumor se encuentran, dejan de propagarlo. La tasa de contacto entre cualquier par de categorías  $X, Y, Z$  se supone constante, e igual a  $\mu > 0$ . Se pide:

a) Escribir un sistema de ecuaciones ordinarias que represente el fenómeno descrito.

- b) Si inicialmente  $Y = 1$ ,  $X = N$ , ¿cuántas personas se quedan sin haber oído el rumor al final del curso?

32. Sean  $A$  y  $B$  matrices  $d \times d$  reales. Pruébese que si  $AB = BA$  entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Dese un ejemplo de  $A$  y  $B$  para las cuales la identidad anterior no sea cierta.

33. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_2, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R}. \quad (7.1)$$

- a) Sea  $\phi_t$  el flujo del sistema y  $\sigma : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  la simetría con respecto al eje  $x_1 = 0$ . Calcúlese

$$\sigma^{-1} \circ \phi_t \circ \sigma.$$

- b) Utilícese el cálculo anterior para probar que las trayectorias del sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\alpha y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_2, \end{cases}$$

se obtienen aplicando la simetría  $\sigma$  a las de (7.1) y cambiando el sentido del tiempo.

34. Sean  $\mu, \mu' \in \mathbf{R}$  no nulos. Muéstrse que una condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación lineal no singular que envíe la familia de curvas  $x_2 = Cx_1^\mu$  (parametrizada por  $C$ ) a la familia  $y_2 = C'y_1^{\mu'}$  (parametrizada por  $C'$ ) es que  $\mu = \mu'$  o  $\mu = 1/\mu'$ . Aplíquese este resultado para obtener una condición necesaria y suficiente para la existencia de una aplicación lineal que transforme las órbitas del sistema

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1, \quad \dot{x}_2 = \beta x_2, \quad \alpha\beta \neq 0$$

en las órbitas de

$$\dot{y}_1 = \gamma y_1, \quad \dot{y}_2 = \delta y_2, \quad \gamma\delta \neq 0.$$

35. Calcúlese  $e^{tA}$  para las siguientes matrices  $A$ :

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Representéense gráficamente los diagramas de fases resultantes.

36. Calcúlese  $e^{tA}$  para  $A$  igual a:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Utilícense los resultados anteriores para calcular  $e^{tA}$  cuando  $A$  es:

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

37. Sea  $A$  una matriz  $3 \times 3$  real con autovalores  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 (=:\lambda_0)$ . Pruébese:

$$e^{tA} = e^{t\lambda_0} \left( \text{Id} + tQ + \frac{1}{2}t^2Q^2 \right),$$

donde  $Q := A - \lambda_0 \text{Id}$ . Generalícese a matrices  $d \times d$ .

38. Resuélvase el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_3 \end{cases}$$

con  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  y  $x_3(0) = 1$ .

39. Supongamos que el origen  $\mathbf{x} = 0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el sistema lineal:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

Pruébese que también es el caso para el sistema:

$$\dot{\mathbf{y}} = B^{-1}ABy$$

siendo  $B$  una matriz no singular.

40. Consideremos el sistema gradiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})$$

siendo  $V$  una función de clase  $C^2$  definida en  $\mathbf{R}^d$ . Pruébese que los mínimos locales estrictos de  $V$  son puntos de equilibrio asintóticamente estables. (Indicación: demuéstrese que para dichos puntos de equilibrio,  $V$  es una función de Liapunov).

41. Sea  $V$  como en el ejercicio precedente y considérese el sistema:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \nabla V(\mathbf{x}) = 0.$$

- a) Reescribese el sistema anterior como un sistema de primer orden en las variables  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{x}}$  y hállese sus puntos de equilibrio.
- b) Si  $\mathbf{x}_0$  es un mínimo estricto de  $V$  entonces  $(\mathbf{x}_0, 0)$  es punto de equilibrio del sistema obtenido en el apartado anterior. Pruébese que es estable. (Indicación: constrúyase una función  $E$  definida en un entorno de  $(\mathbf{x}_0, 0)$  con la propiedad de que  $E$  se anule en dicho punto, sea estrictamente positiva fuera de él y tal que las trayectorias del sistema sean constantes a lo largo de  $E$ ).

42. Consideremos ahora el sistema con rozamiento:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \nabla V(\mathbf{x}) + k\dot{\mathbf{x}} = 0,$$

con  $k > 0$ . Pruébese, escribiendo la ecuación como un sistema de primer orden y construyendo una función de Liapunov adecuada, que los puntos de la forma  $(\mathbf{x}_0, 0)$ , siendo  $\mathbf{x}_0$  un mínimo local estricto de  $V$ , son puntos de equilibrio asintóticamente estables.

43. El siguiente sistema de ecuaciones representa un modelo de dos especies que interactúan, donde la especie  $x_1$  es el alimento (presa) de la especie  $x_2$  (predador). El sistema (no lineal) viene dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1(a - cx_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2(\lambda x_1 - k) \end{aligned}$$

La constante  $a > 0$  nos indica la tasa de crecimiento de la población  $x_1$  en ausencia de la población predatora. La constante  $k > 0$  indica la tasa de mortalidad de la especie predatora cuando se extingue la población presa.  $\lambda$  y  $c$  determinan el efecto de la interacción entre ambas especies. Por ejemplo,  $c$  mide la cantidad proporcional (al tamaño de la especie 1) de individuos de la especie presa que son devorados por unidad de tiempo por la especie predatora.

Se pide:

- a) Interpretese la constante  $\lambda$ .
- b) Determínense los puntos de equilibrio del sistema.

- c) Alrededor de los puntos de equilibrio distintos del origen, estúdiese el sistema linealizado.

44. Consideramos la ecuación de Liénard

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0.$$

- a) Escríbase como un sistema de primer orden y pruébese que sólo tiene un punto de equilibrio.
- b) Si  $f > 0$  constrúyase una función de Lyapunov para el sistema.
- c) En general, si  $f$  no es necesariamente positiva, dar una condición suficiente para que el sistema sea asintóticamente estable.
- d) Considérese el caso de la ecuación de Van der Pol, ie.  $f(x) := \mu(x^2 - 1)$ . En el caso  $\mu = 1$  dibújese el comportamiento aproximado del diagrama de fases. **Indicación:** es útil llevar la ecuación a un sistema de primer orden del siguiente modo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

45. Dado el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= P(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Muéstrese que si  $\text{div}(P, Q) \equiv 0$  existe una función real  $H(x_1, x_2)$  que es constante a lo largo de las trayectorias del sistema.

46. Considérese la siguiente ecuación de segundo orden

$$\ddot{x} + x - x^2 = 0$$

- a) Encuéntrese una función  $H$  con las características del ejercicio anterior.
- b) Estúdiese la estabilidad de los puntos de equilibrio.
- c) Dibujar el diagrama de fases del sistema de primer orden asociado. **Indicación:** puede ser útil aplicar el apartado 1.

47. Repítase el ejercicio anterior para las siguientes ecuaciones:

- a)  $\ddot{x} + \text{sen}(x) = 0$ .
- b)  $\ddot{x} + \text{sen}(x) + x\text{cos}(x) = 0$ .

c)  $\ddot{x} + \cos(x)/x - \sin(x)/x^2 = 0$ .

d)  $\ddot{x} - \lambda + x^2 = 0$  para los distintos valores de  $\lambda$ .

48. Sea  $V$  una función de clase  $C^2$  definida en  $\mathbb{R}^2$ . Dado el sistema gradiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x}(x, y), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y}(x, y),\end{aligned}\tag{7.2}$$

¿qué relación existe entre las trayectorias de (7.2) y las del sistema Hamiltoniano asociado a  $V$ ? Dar una condición necesaria sobre  $V$  para que (7.2) pueda escribirse como un sistema Hamiltoniano para cierta función  $H$ .

49. Probar que la matriz asociada a la ecuación linealizada alrededor de un punto de equilibrio de un sistema Hamiltoniano tiene la propiedad de que sus autovalores suman cero.